وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

آمار

مجموعهٔ علوم انسانی

مهندس محسن طورانی

مؤسسهٔ آموزش عالی آزاد پارسه

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

چاپ پنجم: بهار۸۷ | تیراژ: ۶۰۰۰ نسخه |
شابک: ۴ـ ۶۲ـ۸۷۱۹ـ۹۶۴ | ISBN: 964 – 8719 – 62 - 4
نشانی: بالاتر از میدان ولی‌عصر | کوچه دانش‌کیان | ساختمان پارسه | تلفن: ۸۸۸۸۴۹۲۱۱

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مقدمه

این مجموعه با عنوان آمار و احتمال علوم انسانی برای دانشجویان رشته اقتصاد ـ مدیریت ـ حسابداری و برنامه‌ریزی شهری تدوین شده است، مطالب مجموعه مطابق با آخرین سرفصل شورای عالی برنامه‌ریزی وزارت علوم، تحقیقات و فن‌آوری و هماهنگ با سؤالات کنکور رشته‌های فوق گردآوری شده است.

هدف از تدوین این مجموعه ایجاد توانایی‌های لازم برای دانشجویان رشته‌های فوق بوده تا بتوانند در کمترین زمان، نکات مربوط به تست‌های آمار انسانی را تحلیل و بررسی کنند. بدین منظور پس از بیان مفاهیم اساسی در هر فصل به حل تست‌ها و مسائل مختلف از جمله کنکورهای گذشته پرداخته شده تا دانشجویان آمادگی لازم برای پاسخگویی به سؤالات را کسب نمایند.

مجموعه حاضر شامل ۶ فصل به شرح زیر می‌باشد: در فصل اول آمار توصیفی بررسی شده است و در فصل دوم آنالیز ترکیبی و احتمال مورد بحث قرار گرفته‌اند. سپس در فصل سوم متغیر تصادفی شامل (تابع توزیع، امید و واریانس)، توابع توزیع توأم، توابع شرطی، امید شرطی، ضریب همبستگی و رگرسیون مورد بررسی قرار گرفته است. فصل چهارم شامل مهمترین توابع توزیع گسسته و پیوسته می‌باشد. فصل پنجم مربوط به نمونه‌گیری و برآورد بوده و در فصل ششم آزمون‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ضمیمه این مجموعه که مربوط به سری‌های زمانی است در بعضی از سال‌ها به عنوان یکی از فصل‌های رشته مدیریت مطرح بوده است.

لازم به ذکر است مبحث آزمون رگرسیون، تحلیل واریانس و محاسبه خطای نوع دوم (β) فقط مربوط به دانشجویان رشته اقتصاد و در موارد خاص دانشجویان برنامه‌ریزی شهری می‌باشد.

در این مجموعه سعی شده است ضمن بررسی مبحث‌های هر فصل تست‌های لازم در میان مباحث قرار داده شود.

دانشجویان عزیز برای کسب آمادگی بیشتر می‌توانند به کتاب اینجانب که توسط مؤسسه به چاپ خواهد رسید مراجعه نمایند.

مولف با اقرار بر جایزالخطا بودن و دشواری‌های کار، قدردان زحمات و محبت‌های صاحب‌نظران خواهد بود که اشکالات احتمالی مجموعه را تذکر دهند.

از خانم مهندس براتی برای ویرایش مجموعه و بررسی مجدد تست‌ها، از آقای مهندس داراب برای رسم نمودارها و از خانم مردی برای حروف‌چینی و تنظیم مجموعه کمال سپاسگزاری را دارم.

در پایان لازم می‌دانم از مدیریت موسسه جناب آقای مهندس کاوه عابدین‌زاده به لحاظ مدیریت پویا و منسجم و پشتیبانی همه جانبه مراتب تقدیر و سپاس خود را به جا آورم. و در نهایت این مجموعه را با تمامی کوچکی و فقر باطنی به دانشجویان و دانش‌پژوهان این دیار که نه هرگز فراموششان می‌کنیم و نه فراموشمان می‌کنند تقدیم می‌نمایم.

محسن طورانی
تابستان ۸۶

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل اول: آمار توصیفی

جامعه آماری ۱
مقیاس ۲
نمونه‌گیری ۴
پارامترهای مرکزی (میانگین، میانه، مد، چندک‌ها) ۸
پارامترهای پراکندگی (دامنه تغییرات ، دامنه میان‌چارکی، انحراف چارکی، واریانس، انحراف معیار، نیمه واریانس) ۲۳
ضریب پراکندگی (CV) ۳۰
گشتاورها ۳۴
چولگی ۳۷
کشیدگی ۴۰

فصل دوم: آنالیز ترکیبی و احتمال

اصل ضرب (شمارش) ۴۳
ترتیب ۴۵
ترکیب ۴۹
احتمال ۵۱
حوادث هم‌تراز ۵۴
حوادث مستقل ۵۴
حوادث ناسازگار ۵۵
گروه کامل حوادث ۵۶
مسائل مهم احتمال (پرتاب تاس، سکه، مهره، ....) ۶۱
احتمال شرطی ۷۱
احتمال متوسط ۷۴
قضیه بیز ۷۷

فصل سوم: متغیرهای تصادفی

انواع متغیرهای تصادفی (گسسته پیوسته) ۸۱
تابع احتمال گسسته ۸۱

تابع چگالی پیوسته ۸۲
تابع توزیع تجمعی $(F_X(x))$ ۸۶
محاسبه مد، میانه، چارک، ۹۱
امید ریاضی ۹۳
واریانس ۹۶
تابع مولد گشتاور ۹۸
توزیع احتمال توأم ۹۹
توزیع حاشیه‌ای (کناره‌ای) ۹۹
توزیع احتمال شرطی ۱۰۱
امید شرطی ۱۰۲
کوواریانس ۱۰۳
ضریب همبستگی ۱۰۹
ضریب تشخیص (تعیین) ۱۱۱
رگرسیون ۱۱۲

فصل چهارم: توابع توزیع گسسته و پیوسته

توزیع‌های گسسته ۱۱۹
یکنواخت ۱۱۹
برنولی (دو نقطه‌ای) ۱۲۰
دوجمله‌ای (بینم) ۱۲۰
چندجمله‌ای ۱۲۴
دو جمله‌ای منفی ۱۲۴
هندسی ۱۲۵
فوق‌هندسی ۱۲۷
پواسن ۱۲۹
توزیع‌های پیوسته ۱۳۳
یکنواخت پیوسته ۱۳۳
نمائی ۱۳۴
گاما ۱۳۶
نرمال ۱۳۷
نرمال استاندارد ۱۴۵
توزیع‌های نتیجه‌گیری شده از نرمال (F, t, χ^2) ۱۵۴

فصل پنجم: نمونه‌گیری و برآورد

نظریه نمونه‌ها و توزیع نمونه‌ای ۱۵۷
توزیع میانگین نمونه $(\bar{X})$ ۱۵۸
قضیه حد مرکزی ۱۶۱
چی‌بی‌شف ۱۶۱
توزیع $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ ۱۶۴
توزیع واریانس نمونه (S^2) ۱۶۷
توزیع $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ ۱۶۸
توزیع نسبت نمونه $(\bar{p})$ ۱۶۹
برآورد ۱۷۱
برآورد نقطه‌ای ۱۷۱
خواص مطلوب آماره‌ها (نااریب ـ سازگاری ـ کارائی ـ حداقل میانگین مجذور خطا) ۱۷۲
برآورد فاصله‌ای ۱۷۶
برآورد فاصله‌ای میانگین (μ) ۱۷۷
برآورد فاصله‌ای تفاضل میانگین $(\mu_1 - \mu_2)$، ۱۸۴
برآورد فاصله‌ای نسبت (p) ۱۸۵

برآورد فاصله‌ای تفاضل نسبت $(p_1 - p_2)$ ۱۸۸
برآورد فاصله‌ای واریانس (σ^2) ۱۸۹
برآورد فاصله‌ای نسبت واریانس $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ ۱۹۰

فصل ششم: آزمون فرض

فرض صفر (H_0) و مقابل (H_1) ۱۹۳
سطح معنی‌دار و خطاهای آماری (نوع اول α و نوع دوم β) ۱۹۵
توان آزمون ۱۹۸
مراحل عمومی آزمون فرض ۲۰۰
آزمون میانگین جامعه (μ) ۲۰۰
آزمون مقایسه میانگین دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$ ۲۰۲
آزمون مقایسه نمونه‌های جفت شده ۲۰۴
آزمون نسبت جامعه (p) ۲۰۵
آزمون تفاضل نسبت در دو جامعه $(p_1 - p_2)$ ۲۰۷
آزمون واریانس جامعه (σ^2) ۲۰۹
آزمون نسبت واریانس دو جامعه $\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ ۲۱۰
آزمون نیکوئی برازش ۲۱۲
آزمون استقلال ۲۱۴
آزمون فرض با استفاده از فاصله اطمینان ۲۱۸
آزمون رگرسیون ۲۲۰
تحلیل واریانس ۲۲۳

سوالات کنکور سال ۸۵ و ۸۶ اقتصاد، مدیریت ، حسابداری، برنامه‌ریزی شهری ۲۲۸

ضمیمه

سری‌های زمانی ۲۷۷

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل اول

آمار توصیفی

○ **علم آمار:** روشی علمی است که برای جمع‌آوری، تلخیص، تجزیه و تحلیل، تفسیر و به طور کلی مطالعه و بررسی مشاهدات به کار برده می‌شود.

• **جامعهٔ آماری:** تعدادی از عناصر جامعه که حداقل دارای یک صفت مشخصه باشند، جامعه آماری را تشکیل می‌دهند.

جامعه آماری به دو دسته تقسیم می‌شود:
۱) محدود: تعداد افراد جامعه محدود است.
۲) نامحدود: تعداد افراد جامعه نامحدود است.

• **صفت مشخصه:** صفتی است که بین همه عناصر جامعهٔ آماری مشترک و متمایز کننده آن جامعهٔ آماری از سایر جوامع می‌باشد.

مثال : کدام تعریف برای صفت مشخصه صحیح است؟ (مدیریت ۷۲)

۱) صفتی است که اندازه‌گیری آن از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کند

۲) صفتی است که قابل اندازه‌گیری است

۳) صفت مشترک برای افراد جامعه است

۴) صفتی که قابل شمارش باشد

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

• **صفت:** کمیت یا کیفیتی است که متعلق به عناصر جامعه آماری بوده و همواره به دو بخش تقسیم می‌شود: صفت مشترک (ثابت) و صفت متغیر

۱) صفت مشترک (ثابت): صفتی است که بین همه عناصر جامعه آماری مشترک است. مانند صفت دانش‌آموز بودن برای دانش‌آموزان یک کشور.

۲) صفت متغیر: خاصیتی است که افراد یک جامعه را از یکدیگر متفاوت، جدا و مشخص می‌سازد. و از فردی به فرد دیگر می‌تواند تغییر کند. مانند صفات: قد، سن، وزن، ... .

صفات متغیر به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می‌شوند.

صفات متغیر کمی: در صفات کمی امکان اندازه‌گیری و بیان یک عدد واحددار مانند: کیلومتر ـ کیلو و ... وجود دارد. که به دو دسته : پیوسته (قد ـ وزن) و گسسته (تعداد اعضاء خانواده) تقسیم می‌شود.

صفات متغیر کیفی : در صفات کیفی امکان اندازه‌گیری با ابزارهای رایج وجود نداشته و نمی‌توان آن را به صورت عددی واحددار بیان نمود. مانند: رشته تحصیلی ـ رنگ پوست ـ کیفیت و مرغوبیت کالا

● **مقیاس:** با توجه به نوع صفات کیفی و کمی، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری متغیرها وجود دارد. انواع مقیاس‌ها به شرح زیر است:

۱ـ اسمی (طبقه‌ای)

۲ـ رتبه‌ای (ترتیبی)

۳ـ فاصله‌ای

۴ـ نسبی (نسبتی)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ مقیاس اسمی(طبقه‌ای): ضعیف‌ترین شکل اندازه‌گیری است که در آن از اعداد و علائم برای طبقه‌بندی اشیاء، اشخاص یا خصوصیت استفاده می‌شود. مانند مشخص کردن سازمان‌ها با اسم‌های A و B و C و ... .

این نوع مقیاس به علت ضعف در اندازه‌گیری، در صفات کیفی استفاده می‌شود.

۲ـ مقیاس رتبه‌ای (ترتیبی): در مواردی صرف‌نظر از محتویات یک طبقه یا گروه با طبقه یا گروه دیگر نوعی ارتباط بین آن‌ها برقرار است، این روابط با توجه به نوع مقیاس نشان‌دهندهٔ حالت ترتیبی است. برای مثال طبقه‌بندی افراد جامعه به صورت (پردرآمد ـ متوسط ـ کم درآمد)، (قوی ـ متوسط ـ ضعیف)،(بالا ـ وسط ـ پایین)، (بزرگتر ـ مساوی ـ کوچکتر) نشان‌دهنده حالت ترتیبی است.

این نوع مقیاس نیز به علت ضعف در اندازه‌گیری، در صفات کیفی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳ـ مقیاس فاصله‌ای: وقتی یک مقیاس همهٔ خصوصیات مقیاس ترتیبی را داشته و به علاوه فاصله بین هر دو عدد نیز در آن مشخص باشد، به یک مقیاس قوی‌تر رسیده‌ایم که می‌تواند برای صفات کمی مورد استفاده قرار گیرد.

در این مقیاس، صفر به صورت قراردادی و اختیاری است. مانند: سانتی‌گراد و فارنهایت که دارای صفرهای قراردادی مختلفی هستند.

و نسبت هر دو فاصله مستقل از واحد اندازه‌گیری و مستقل از نقطه صفراست.

۴ـ مقیاس نسبتی (نسبی): دقیق‌ترین مقیاس برای صفات کمی است که علاوه بر داشتن تمام خصوصیات مقیاس فاصله‌ای ، دارای صفر واقعی نیز می‌باشد. مقیاس‌هایی مثل: پوند، گرم، متر، اینچ دارای صفر واقعی هستند. همچنین نسبت هر دونقطه دلخواه مستقل از

واحد اندازه‌گیری است (مانند مقیاس فاصله‌ای). برای مثال وزن دو شیء مختلف را می‌توان هم با گرم و هم با پوند اندازه‌گیری کرد. اما نسبت آن‌ها با هم فرقی نمی‌کند و به واحد اندازه‌گیری ربطی ندارد.

مراتب / مقیاس	ترتیب	فواصل	صفر قراردادی	صفر مطلق (واقعی)
اسمی	ندارد	ندارد	ندارد	ندارد
رتبه‌ای	دارد	ندارد	ندارد	ندارد
فاصله‌ای	دارد	دارد	دارد	ندارد
نسبی	دارد	دارد	دارد	دارد

● **نمونه:** به هر بخش از جامعه آماری محدود یا نامحدود یک نمونه گفته می‌شود یا به عبارت دقیق‌تر به تعداد محدودی از اعضای جامعه آماری که بیان کننده تمام ویژگی‌های جامعه اصلی باشند، نمونه گویند.

با توجه به تعاریف جامعهٔ آماری و نمونه، حال می‌توانیم آماره و پارامتر را تعریف کنیم.

● **آماره:** اصطلاحی است که در مورد نمونه استفاده می‌شود و خصوصیتی از آن را بررسی می‌کند. مانند: میانگین نمونه $(\bar{x})$، واریانس نمونه (S^2)،نسبت نمونه $(\bar{p})$.

نکته: هر آماره یک متغیر تصادفی است، چرا که از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند.

● **پارامتر:** عددی است که خصوصیتی از یک جامعه را بیان می‌کند مانند: میانگین جامعه (μ)، واریانس جامعه (σ^2) ، میانه (Md).

نکته: پارامترها در جامعه ثابت هستند ولی مجهول و باید آن‌ها را از طریق آماره‌ها در نمونه‌گیری تخمین بزنیم.

● **پارامترها و آماره‌های مهم:**

شاخص	گروه	نماد کلی	میانگین	واریانس	نسبت
آماره	نمونه	$\hat{\theta}$	$\bar{x}$	S^2	$\bar{P}$
پارامتر	جامعه	θ	μ	σ^2	P

تفاوت در نوع و همچنین کاربردهای شاخص آماره و پارامتر، موجب تقسیم‌بندی آمار به آمار توصیفی و آمار استنباطی (استنتاجی) شده است.

آمار از نظر موضوعی به سه بخش تقسیم می‌شود: آمار توصیفی، آمار استنتاجی(استنباطی)، آمار ناپارامتریک

۱) آمار توصیفی: این آمار به توصیف جامعه می‌پردازد و هدف آن محاسبه پارامترهای جامعه است. چنانچه محاسبه مقادیر و شاخص‌های آماری برای جامعه از طریق سرشماری تمامی عناصر انجام گیرد، به آن آمار توصیفی گفته می‌شود.

۲) آمار استنتاجی (استنباطی): به قسمتی از آمار که می‌تواند نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل نمونه را به جامعه تعمیم دهد، آمار استنتاجی گفته می‌شود. به عبارت دیگر آماره‌ها از طریق نمونه‌گیری بدست می‌آیند، سپس به کمک تخمین (برآورد) و آزمون فرض، به پارامترهای جامعه تعمیم داده می‌شوند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۳) آمار ناپارامتریک: در مقابل آمار پارامتریک قرار دارد. در آمار پارامتریک فرض اساسی برخوردار بودن مشاهدات از توزیع نرمال است. در آمار ناپارامتریک، فرض فوق وجود نداشته و بیشتر متغیرها با مقیاس کیفی سنجیده می‌شوند و آزاد از توزیع هستند. در حقیقت در این آمار به هیچ توزیعی وابستگی وجود ندارد.

مثال ۱: کدام دسته از فنون آماری زیر بر فرض آزاد از توزیع بنا شده‌اند ؟ (مدیریت ۸۲)

۱) پارامتریک ۲) ناپارامتریک ۳) توصیفی ۴) استنباطی

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

• نمونه‌گیری

در بسیاری از موارد پژوهشگران به دنبال تعیین پارامترهای جامعه (مانند: میانگین جامعه (μ) ، واریانس جامعه (σ^2)) هستند. البته به‌طور طبیعی این عمل امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل با استفاده از نمونه‌گیری به استنباط پارامترهای جامعه آماری می‌پردازند.

نکته: اگر پارامتر را **شاخص** بدست آمده از طریق نمونه‌گیری بنامیم، به این شاخص در یک نمونه n تائی آماره می‌گوئیم. گفتنی است آماره از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند. به همین علت برای رسیدن به یک پایائی و reliability باید به یک تقریب برای **توزیع نمونه‌گیری آماره** برسیم.

•توزیع آماره

تابع احتمالی است که از نمونه‌گیری مکرر حاصل می‌شود. در شکل کامل‌تر به آن، توزیع نمونه‌گیری آماره (Statistic Sampling Distribution : (SSD)) می‌گوئیم.

• دلایل نمونه‌گیری

۱ـ هزینه

۲ـ به روز بودن

۳ـ درستی و صحت

۴ـ صرفه‌جوئی در زمان

۵ـ آزمون تخریب‌کننده

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته: انواع روش‌های نمونه‌گیری:

۱ـ تصادفی ساده:
- الف) قرعه‌کشی
- ب) جدول اعداد تصادفی

۲ـ نمونه‌گیری منظم (Systematic Sampling)

۳ـ نمونه‌گیری گروهی (Stratified Sampling)

۴ـ نمونه‌گیری خوشه‌ای (Cluster sampling)

۵ـ نمونه‌گیری مرحله‌ای (Stage Sampling)

دقت کنید، صرف‌نظر از این‌که چه روش آماری برای استنباط آماری موردنظر است، قدرت آن به روش بکار رفته برای انتخاب نمونه بستگی دارد. در صورتی که نمونه موردنظر نماینده واقعی جامعه نباشد، نمونه موردنظر دارای **اریب (bias)** است. در این حالت پیش‌بینی صحیح و دقیق درباره پارامترهای جامعه امکان نخواهد داشت.

۱ـ نمونه‌گیری تصادفی ساده

در این حالت هر یک از عناصر جامعه برای انتخاب شدن شانس مساوی دارند (هم تراز هستند). در این حالت افراد یا اشیاء به طور تصادفی از لیست تهیه شده از جامعه انتخاب می‌شوند و باید دارای ویژگی‌هائی همانند ویژگی‌های همان جامعه‌ای که از آن انتخاب می‌شوند، باشند.

که این راه به دو روش : قرعه‌کشی و جدول اعداد تصادفی انجام می‌شود.

۲ـ نمونه‌گیری منظم (سیستماتیک)

در این روش، شکل تغییر یافته حالت تصادفی ساده به کار گرفته می‌شود. یک نقطه از فهرست افراد یا اشیاء جامعه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و بعد از آن نمونه موردنظر را به صورت منظم پشت سر هم انتخاب می‌کنیم. این روش برای آن دسته از جوامع آماری که کد از پیش تعیین شده و مرتبی دارند، کاربرد فراوان دارد با مشخص شدن اولین عضو بقیه اعضا نیز مشخص می‌شوند این خاصیت از یک سو یک حسن است اما چون شانس را از بقیه اعضا می‌گیرد عیب محسوب می‌شود. مانند: شماره کارمندی، شماره دانشجوئی

۳ـ نمونه‌گیری گروهی

در این روش جامعه را به گروه‌های متجانس تقسیم و هر گروه دارای ویژگی‌های مشابهی هستند. پس از تقسیم جامعه به گروه‌های متجانس از هر گروه نمونه موردنظر به روش تصادفی ساده و منظم گرفته می‌شود. نکته مهم این است که در جوامعی مورد استفاده قرار می‌گیرد که از نظر صفت موردنظر ناهمگون است. مانند بررسی عملکرد واحدهای مختلف یک سازمان.

۴ـ نمونه‌گیری خوشه‌ای

هر گاه جامعه موردنظر خیلی وسیع و گسترده باشد مانند وضعیت معاش یا تحصیل یک شهر بزرگ یا یک کشور برای کارمندان،برای نمونه‌گیری ابتدا سازمان‌ها یا اداراتی را به روش تصادفی ساده یا سیستماتیک (منظم) انتخاب می‌کنیم سپس کارمندان موردنیاز را با استفاده از همین روش به دست می آوریم در این‌جا واحد نمونه‌گیری خوشه‌ای، سازمان بوده است.

۵ـ نمونه‌گیری مرحله‌ای

شکل گسترش یافته نمونه‌گیری خوشه‌ای است . در این حالت نمونه‌گیری از جامعه طی چند مرحله انجام می‌شود. یعنی انتخاب نمونه از نمونه دیگر، به طور مثال چند سازمان از شهر انتخاب می‌کنیم سپس از بین هر سازمان چند واحد را معین می‌کنیم سپس عناصر نمونه را به صورت تصادفی بدست می‌آوریم.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

• داده‌های آماری

به اندازه‌های صفت متغیر عناصر جامعه یا نمونهٔ آماری که با استفاده از اندازه‌گیری، آزمایش، مشاهده و غیره به دست می‌آید، داده‌های آماری می‌گویند.

داده‌های آماری به دو صورت طبقه‌بندی شده و طبقه‌بندی نشده می‌باشند.

• طبقه‌بندی صفات

از آن‌جا که اطلاعات آماری به صورت اعداد و ارقام بیان می‌شوند، اگر بتوان آن‌ها را به صورت طبقه‌بندی شده بیان کرد، به راحتی می‌توان به خصوصیات مهم آن‌ها پی برد، این داده‌ها به دو دسته پیوسته و ناپیوسته تقسیم می‌شوند.

ـ به اعدادی که طبقات یک جدول توزیع فراوانی را مشخص می‌سازند، حدود طبقات می‌گویند.

ـ مرکز یک طبقه برابر نصف مجموع حد پائین و حد بالای آن طبقه است. که به آن نماینده طبقه یا متوسط طبقه نیز می‌گویند.

ـ طول طبقه یا دسته تفاوت بین حدود بالا یا پائین دو طبقه متوالی است.

مثال ۱: به جدول اعداد طبقه‌بندی شده (پیوسته) زیر توجه کنید:

طبقات	0 – 5	5 – 10	10 – 15
فراوانی	3	4	13

به طور مثال در طبقه اول *5* حد *بالا* و *0* حد *پائین* را تشکیل می‌دهد. از طرفی $\frac{0+5}{2}=2.5$ مرکز طبقه اول، $\frac{5+10}{2}=7.5$ مرکز طبقه دوم ، $\frac{10+15}{2}=12.5$ مرکز طبقه سوم و 5 طول طبقات است، چرا که **5**=0-5 ، **5**=5-10 یا **5**=10-15 می‌باشد.

نکته :پیوسته کردن جدول با طبقات ناپیوسته:

به طور کلی در جداول با طبقات گسسته کافی است عبارت $\left(\frac{\text{حد بالای طبقه ـ حد پائین طبقه‌بعدی}}{2}\right)$ محاسبه شده و مقدار محاسبه شده را از حد پایین طبقات کم و به حد بالای طبقات اضافه کنیم و طبقات را به صورت پیوسته ظاهر می‌کنیم.

مثال ۲: به جدول اعداد طبقه‌بندی شده (ناپیوسته) زیر توجه کنید:

طبقات	5 – 9	10 – 14	15 – 19
فراوانی	3	7	4

جدول طبقه‌بندی شده ناپیوسته

→

طبقات	4.5 – 9.5	9.5 – 14.5	14.5 – 19.5
فراوانی	3	7	4

جدول طبقه‌بندی شده پیوسته

توجه: در این جدول، حد بالای طبقه اول با حد پائین طبقه دوم برابر نمی‌باشند، اصطلاحاً به این‌گونه طبقه‌بندی، طبقه‌بندی ناپیوسته می‌گویند. برای پیوسته کردن این جدول لازم است به اندازه 0.5 واحد از حد پائین طبقات کم و به حد بالای آن‌ها اضافه نمائیم. بقیه محاسبات مانند مثال قبل است.

• انواع فراوانی‌ها

۱ـ فراوانی مطلق(F_i)

تعداد دفعات تکرار هر داده i را فراوانی مطلق دادهٔ i گوئیم که با F_i نشان داده می‌شود.

نکته :مجموع فراوانی‌های مطلق داده‌ها برابر با حجم جامعه می‌شود:

در صورتی‌که K داده مختلف داشته باشیم :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} F_i = N}$$

۲ـ فراوانی نسبی (f_i)

نسبت فراوانی مطلق هر داده i به حجم جامعه را فراوانی نسبی می‌نامند.

$$\boxed{f_i = \frac{F_i}{N}}$$

نکته :مجموع فراوانی‌های نسبی برابر یک است .

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1}$$

۳ـ درصد فراوانی نسبی

به حاصلضرب فراوانی نسبی هر داده i در 100، درصد فراوانی نسبی گفته می‌شود.

۴ـ فراوانی تجمعی (F_{C_i})

فراوانی تجمعی هر داده (طبقه) برابر است با جمع فراوانی مطلق همان طبقه به علاوه فراوانی‌های مطلق طبقات ماقبل آن :

$$\boxed{F_{C_i} = F_1 + F_2 + \cdots + F_i}$$

نکته :فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر با حجم کل جامعه است.

۵ـ فراوانی نسبی تجمعی (f_{C_i})

فراوان نسبی تجمعی درصد مشاهدات واقع شده بین حد پایین اولین طبقه و حد بالای i امین طبقه را نشان می‌دهد. یعنی: $\boxed{f_{c_i} = \frac{F_{c_i}}{N}}$

نکته :فراوانی نسبی تجمعی آخرین طبقه یک است.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال : به جدول زیر توجه کنید:

C − L	0 − 5	5 − 10	10 − 15	15 − 20	
F_i	10	20	30	40	$\longrightarrow N = \sum_{i=1}^{K} F_i = 100$
F_{C_i}	10	30	60	100	$\longrightarrow$ فراوانی تجمعی طبقه آخر = حجم کل جامعه = N = 100
f_i	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\longrightarrow \sum_{i=1}^{k} f_i = \frac{10+20+30+40}{100} = 1$
f_{c_i}	$\frac{10}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{100}{100}$	$\longrightarrow$ فراوانی نسبی تجمعی آخرین طبقه = 1

○ مشخص کننده‌های عددی

پارامترهایی هستند که برای مقایسه بین چند جامعه به کار می‌روند و به سه بخش تقسیم می‌شوند: ۱ـ پارامترهای مرکزی ، ۲ـ پارامترهای پراکندگی، ۳ـ پارامترهای نسبی پراکندگی

۱) پارامترهای مرکزی: هر معیاری که معرف مرکز مجموعهٔ داده‌ها باشد، پارامتر مرکزی نامیده می‌شود. از جمله این معیارها عبارتند از: میانگین ـ میانه ـ مد(نما) ـ چندک‌ها (چارک‌ها ـ دهک‌ها ـ صدک‌ها)

ـ میانگین: اصلی‌ترین شاخص مرکزی میانگین است. در حقیقت اگر داده‌ها روی یک محور به صورت منظم ردیف شوند، مقدار میانگین دقیقاً نقطه تعادل و مرکز ثقل توزیع است.

○ انواع میانگین

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ میانگین حسابی $(\mu = \bar{x})$

۲ـ میانگین هندسی $(\bar{X}_G)$

۳ـ میانگین هارمونیک $(\bar{X}_H)$

۴ـ میانگین پیراسته

۵ـ میانگین وزنی $(\bar{X}_\omega)$

نکته: همیشه $\bar{X} > \bar{X}_G > \bar{X}_H$ است و فقط زمانی که داده‌ها با یکدیگر برابر باشند $\bar{X} = \bar{X}_G = \bar{X}_H$ خواهد بود.

مثال : کدام‌یک از روابط زیر بین میانگین حسابی $(\bar{x})$ ، میانگین هندسی $(\bar{x}_G)$ و میانگین هارمونیک $(\bar{x}_H)$ برقرار است؟

(اقتصاد ۷۴)

۱) $\bar{X}_H < \bar{X}_G < \bar{X}$ ۲) $\bar{X}_G < \bar{X} < \bar{X}_H$ ۳) $\bar{X}_G < \bar{X}_H < \bar{X}$ ۴) $\bar{X} < \bar{X}_G < \bar{X}_H$

حل : با توجه به تعاریف بالا گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

۱ـ میانگین حسابی

معدل مجموعه‌ای از مشاهدات را میانگین حسابی می‌نامند که از تقسیم مجموع مشاهدات بر تعداد آن‌ها محاسبه می‌شود.

۱ـ محاسبه میانگین حسابی داده‌های طبقه‌بندی نشده و نیمه طبقه‌بندی شده

$$\mu = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

مثال ۱ : اگر میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ برابر 5 باشد و عدد 10 به آن‌ها اضافه شود، میانگین $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ و 10چیست؟

$$5 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \Rightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 50$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + 10}{11} = \frac{50+10}{11} = \frac{60}{11}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته۱ : میانگین داده‌های x_1 تا x_n که تشکیل تصاعد حسابی را می‌دهند به صورت روبرو محاسبه می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

نکته۲: میانگین اعداد طبیعی 1 تا N برابر $\frac{N+1}{2}$ است.

$$\bar{X} = \frac{1+2+3+\cdots+N}{N} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N} = \frac{N+1}{2}$$

نکته۳: اگر مقادیر مشاهده شده برای متغیر زیاد متنوع نباشد از جدول توزیع فراوانی نیمه طبقه‌بندی شده استفاده می‌شود توجه کنید که محاسبات برای این نوع داده‌ها مانند حالت داده‌های طبقه‌بندی نشده است.

مثال ۲: میانگین داده‌های زیر چیست؟

x_i = داده	2	1	3
F_i فراوانی مطلق	5	4	2

حل : محاسبهٔ میانگین برای داده‌های نیمه طبقه‌بندی شده

$$\bar{X} = \frac{3\times2+1\times4+2\times5}{2+4+5} = \frac{20}{11}$$

مثال ۳: جدول توزیع فراوانی زیر را در نظر بگیرید. اگر $\mu = 2$ و $N = 28$ باشد، مقادیر a و b عبارتند از: (اقتصاد ۸۱)

x_i	0	1	2	3	4
F_i	3	a	10	b	3

۱) $a = b = 6$ ۲) $a = 5$ و $b = 7$ ۳) $a = b = 7$ ۴) $a = 4$ و $b = 8$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\mu=\frac{\sum F_i x_i}{N}\rightarrow 2=\frac{(0\times 3)+(1\times a)+(2\times 10)+(3\times b)+(4\times 3)}{28}$$

$$\rightarrow 56=a+20+3b+12\rightarrow a+3b=24$$

از طرفی

$$\sum F_i=N\rightarrow 3+a+10+b+3=28\rightarrow a+b=12$$

حال می‌توان a , b را به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{cases}a+3b=24\\a+b=12\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a+3b=24\\-a-b=-12\end{cases}$$

$$2b=12\rightarrow b=6$$

$$a+3(6)=24\rightarrow a=6$$

۲) محاسبهٔ میانگین حسابی داده‌های طبقه‌بندی شده: ابتدا مرکز طبقات را بدست آورده و سپس به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\bar{X}=\frac{\sum F_i\ x_i}{N}=\sum f_i\ x_i \qquad (x_i:\text{مرکز طبقه})$$

$$f_i=\frac{F_i}{N}$$

مثال : مطلوبست میانگین جدول زیر:

C−L	0−5	5−10	10−15	
F_i	2	3	4	$\Sigma F_i=N=9$

ابتدا مرکز طبقات را بدست می‌آوریم:

$$\text{مرکز هر طبقه}=\frac{\text{حد بالا + حد پائین}}{2}$$

x_i	$\overbrace{\frac{5+0}{2}}^{2.5}$	$\overbrace{\frac{5+10}{2}}^{7.5}$	$\overbrace{\frac{10+15}{2}}^{12.5}$
F_i	2	3	4

$$\Rightarrow\frac{\sum F_i x_i}{N}=\frac{(2\times 2.5)+(3\times 7.5)+(4\times 12.5)}{9}=\frac{5+22.5+50}{9}=\frac{77.5}{9}$$

• خواص میانگین حسابی

۱) مجموع انحرافات از میانگین همیشه صفر است. $\boxed{\sum(x_i-\mu)=0}$

۲) مجموع مجذور انحرافات از میانگین همیشه می‌نیمم است. a عدد دلخواه است ; $\boxed{\sum(x_i-\mu)^2<\sum(x_i-a)^2}$

۳) اگر a و b اعداد ثابتی باشند:

الف) $\mu(\pm a)=\pm a$ ب) $\mu(x\pm a)=\mu_x\pm a$ ج) $\mu_{(\pm ax)}=\pm a\mu_{(x)}$

د) $\mu\left(\frac{x}{\pm a}\right)=\frac{1}{\pm a}\mu_x$ هـ) $\mu(\pm x\pm y)=\pm\mu_x\pm\mu_y$ و) $\mu(\pm ax\pm b)=\pm a\mu_x\pm b$

۴) در جامعه آماری فقط یک میانگین داریم.

۵) مقادیر بزرگ و کوچک به سهم خود در میانگین سهم دارند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۶) میانگین تنها پارامتری است که اگر به جای کلیه داده‌ها قرار گیرد، مجموع آن‌ها تغییری نمی‌کند، یعنی:

$$\underbrace{1,2,3}_{\text{مجموع}=6} \rightarrow \bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \Rightarrow \underbrace{2,2,2}_{\text{مجموع}=6}$$

مثال ۱: اگر کمیت‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ با حجم n به دست آمده باشند، کدام یک از روابط زیر صادق است؟ (اقتصاد ـ ۷۱)

۱) $\sum X_i = n\bar{X}^2$ ۲) $\sum (X_i - \bar{X}) = 0$ ۳) $\sum (X_i - \bar{X})^2 = 0$ ۴) $\sum (X_i - me) = 0$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مجموع انحرافات از میانگین همواره صفر است. به عبارت دیگر $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ می‌باشد.

مثال۲: اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر 30 باشد. میانگین داده‌های $\frac{x_1}{3} + 4, \frac{x_2}{3} + 4, \ldots, \frac{x_n}{3} + 4$ چقدر است؟

حل :

$$\mu\left(\frac{x}{3} + 4\right) = \frac{\mu}{3} + 4 = \frac{30}{3} + 4 = 14$$

۲ـ میانگین هندسی (μ_G) :

اگر داده‌های بدست آمده نسبت،درصد، شاخص نرخ رشد و ... باشد، برای بدست آوردن مقدار متوسط از میانگین هندسی استفاده می‌کنیم:

برای داده‌های طبقه‌بندی نشده:

$$\boxed{\mu_G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} = (x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}}}$$

برای داده‌های طبقه‌بندی شده:

$$\boxed{\mu_G = \sqrt[\sum F_i]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \ldots \times x_n^{F_n}} = \left(x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \ldots \times x_n^{F_n}\right)^{\frac{1}{\sum F_i}}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\mu_G = x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots \times x_n^{f_n}}$$

نکته :باید توجه داشت که اگر در بین داده‌ها عدد صفر یا منفی وجود داشته باشد، نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

نکته :در میانگین هندسی اگر به جای نسبت از اعداد استفاده شود، برای به دست آوردن متوسط رشد و یا میانگین به درصد باید در انتها مقدار به دست آمده را از یک کسر کنیم، اگر فقط چند برابر شدن مدنظر سؤال باشد نیازی به این محاسبه نمی‌باشد.

مثال۳: فرض کنید شاخص قیمت خرده فروشی از 200 در سال ۷۸ به 450 در سال ۸۰ رسیده باشد، متوسط نرخ تورم در این فاصله زمانی چه بوده است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 50% ۲) 62.5% ۳) 125% ۴) 150%

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\bar{X}_G = \sqrt{\frac{\text{سال } 79}{\text{سال } 78} \times \frac{\text{سال } 80}{\text{سال } 79}} = \sqrt{\frac{450}{200}} = 1.5$$

$$1.5 - 1 = 0.5 = \%50$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۴: تعداد کارکنان کارخانه‌ای طی چهار سال متوالی 190، 180، 160، 150 بوده است. متوسط رشد سالانه تعداد کارکنان چند درصد است؟ (حسابداری ـ ۸۲)

۱) 5.5%　　۲) 6.08%　　۳) 7.4%　　۴) 8.2%

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\bar{X}_G \overset{\text{تعداد سال‌ها}-1}{=} \sqrt[4-1]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[4-1]{\frac{190}{150}} = 1.082 \rightarrow 1.082 - 1.000 = 0.082 = \%8.2$$

مثال۵: قیمت کالایی در سال گذشته 20% کاهش و امسال 20% افزایش داشته است. متوسط نرخ رشد قیمت این کالا در این دو سال چیست؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) صفر　　۲) $\sqrt{0.96}$　　۳) $(0.96)^{\frac{1}{2}} - 1$　　۴) $\frac{1}{2}\left[\log(0.8) - \log(0.02)\right]$

حل : گزینه ۳صحیح می‌باشد.

با توجه به رابطه سوم میانگین هندسی و این‌که: در واقع این تغییرات برای سه سال متوالی صورت گرفته است داریم:

سال اول		سال دوم		سال سوم
x تومان	$\xrightarrow[x - 0.2x]{\text{کاهش } \%20}$	0.8x تومان	$\xrightarrow[0.8x + 0.2(0.8x)]{\text{افزایش } \%20}$	0.96 x تومان

$$\bar{X}_G \overset{\text{تعداد سال‌ها}-1}{=} \sqrt[3-1]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[3-1]{\frac{0.96x}{x}} = \sqrt[2]{0.96} \text{ برابر } \rightarrow \left(\sqrt[2]{0.96} - 1\right) \text{ درصد}$$

توجه شود که برای میانگین هندسی پیش فرض درصد است.

۳ـ میانگین هارمونیک (توافقی یا معکوس یا همساز، μ_H)

اگر مقیاس داده‌ها به صورت ترکیبی باشد از این میانگین استفاده می‌کنیم. مانند: متر در ثانیه، کیلومتر بر ساعت و.....

$$\boxed{\bar{X}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}}$$

نکته :ممکن است داده‌ها دارای وزن باشند، آنگاه میانگین هارمونیک به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\bar{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\frac{w_1}{x_1} + \cdots + \frac{w_k}{x_k}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{x_i}}}$$

مثال۱: اتومبیلی مسیری را با سرعت 100 کیلومتر رفته، و $\frac{1}{3}$ مسیر را با سرعت 80 کیلومتر و باقیمانده را با سرعت 120 کیلومتر برگشته، سرعت متوسط این اتومبیل چقدر بوده است؟ (مدیریت ۸۲)

۱) 90　　۲) 100　　۳) 101.4　　۴) 102.8

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\bar{X}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\frac{w_1}{x_1} + \dots + \frac{w_n}{x_n}} = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{100} + \frac{1/3}{80} + \frac{2/3}{120}} = 101.4$$

مثال۲: اگر 3 اتومبیل مسیر 60کیلومتری بین دو منطقه را به ترتیب با سرعت 120 و 60 و 90کیلومتر در ساعت طی نمایند. میانگین سرعت این سه اتومبیل برابر با چند کیلومتر در ساعت است؟ (مدیریت ۷۹)

۱) تقریباً 83 ۲) تقریباً 86 ۳) تقریباً 90 ۴) 90

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{3}{\frac{1}{120} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = 83.076$$

مثال۳: در یک کارگاه 5 ماشین با سرعت 4 دور در ثانیه و 3 ماشین با سرعت 6 دور در ثانیه کار می‌کنند. سرعت متوسط این ماشین‌ها چند دور در ثانیه است؟ (حسابداری و مدیریت ۸۵)

۱) 4.85 ۲) 4.75 ۳) 4.63 ۴) 4.57

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به واحد ترکیبی (دور در ثانیه) از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x}_H = \frac{5+3}{\frac{5}{4} + \frac{3}{6}} = \frac{8}{\frac{21}{12}} = \frac{96}{21} = 4.57$$

۴ـ میانگین وزنی (μ_w):

در صورتی که داده‌ها دارای وزن‌های متفاوتی باشند، از میانگین وزنی استفاده می‌کنیم:

$$\bar{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

مثال : در صورتی که نمرات یک دانشجو در یک ترم به فرم زیر باشدمطلوبست محاسبه معدل یا میانگین معدل او در این ترم.

	w_i	x_i
آمار	3 واحد	10
ریاضی	2 واحد	15
فیزیک	3 واحد	10

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\bar{X}_\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{3\times10 + 2\times15 + 3\times10}{3+2+3} = \frac{90}{8} = 11.25$$

۵ـ میانگین پیراسته

این میانگین زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در بین داده‌ها، داده‌هائی وجود داشته باشند که به علت بزرگی یا کوچکی زیاد با سایر داده‌ها همخوانی نداشته باشند.

محاسبه میانگین این روش به صورت دستی انجام شده و زمان‌بر است. ترتیب آن به فرم زیر است:

۱) داده‌ها به صورت صعودی مرتب شوند.

۲) تمام مشاهدات پائین‌تر و بالاتر از درصد مشخصی حذف شوند.

۳) میانگین بقیه داده‌ها را به صورت حسابی محاسبه می‌کنیم.

❍ میانه (Md یا Me)

عددی است که 50% داده‌ها قبل و 50% داده‌ها بعد از آن قرار دارند. به عبارت دیگر تعداد داده‌های قبل و بعد از میانه با هم برابر هستند.

برای محاسبه میانه همیشه در دو حالت زیر می‌توان عمل نمود:

۱) داده‌های طبقه‌بندی نشده ۲) داده‌های طبقه‌بندی شده

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ محاسبهٔ میانه برای داده‌های طبقه‌بندی نشده:

برای این داده‌ها به طریق زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا کل داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

ب) محل میانه توسط $\frac{N}{2}+\frac{1}{2}$ مشخص می‌شود. (N تعداد داده‌ها)

مثال ۱: میانه داده‌های زیر را محاسبه نمایید.

$\boxed{-1 \text{ و } 0 \text{ و } 9 \text{ و } 7 \text{ و } 6}$

$\boxed{-1 \text{ و } 4 \text{ و } 0 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9}$

حل :

(داده) محل سوم

مرتب سازی: $-1 , 0 , \overset{\uparrow}{6} , 7 , 9$

محل میانه $= \frac{N}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

مقدار میانه $= 6 \Rightarrow \boxed{Md = 6}$

(داده) محل سوم

مرتب‌سازی : $-1 \text{ و } 0 \text{ و } \overset{\uparrow}{4} \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9$

محل میانه $= \frac{N}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3.5$

مقدار میانه $= 4+0.5\,(5-4)=4.5 \Rightarrow \boxed{Md = 4.5}$

نکته : اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، میانه بعد از مرتب‌سازی دادهٔ وسط است. امادر صورتی که تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه بعد از مرتب سازی، میانگین دو عدد وسط خواهد بود. مثال قبلی را مجدداً مرور می‌کنیم:

$-1 \text{ و } 0 \text{ و } 6 \text{ و } 7 \text{ و } 9 \rightarrow$ تعداد داده‌ها فرد : میانه $= 6$

$-1 \text{ و } 0 \text{ و } 4 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 9 \rightarrow$ تعداد داده‌ها زوج: میانه $\frac{4+5}{2}=4.5$

توجه کنید اگر در حالت داده‌های طبقه‌بندی نشده، جدول توزیع فراوانی داده شد، (حالت نیمه طبقه‌بندی شده) از روی جدول، فراوانی تجمعی را به دست می‌آوریم و محل میانه با توجه به ترتیب صعودی که در جدول حفظ شد، به دست می‌آید.

مثال ۲: جمعیت خانواده‌های یک روستا به صورت زیر است، میانه جمعیت خانواده چقدر است؟ (حسابداری ۸۲)

جمعیت خانواده x_i	1	2	3	4	5	6	جمع
تعداد F_i	5	10	40	25	15	5	$100 = \sum F_i = N$
F_{C_i}	5	15	55	80	95	100	

۱) 3 ۲) 3.5 ۳) 3.25 ۴) 4

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

از روی جدول، فراوانی تجمعی را بدست می‌آوریم. محل میانه با توجه به ترتیب صعودی که در جدول حفظ شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{محل میانه} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{100}{2} + \frac{1}{2} = 50.5$$

$$\text{مقدار میانه} = \underbrace{3}_{\text{داده پنجاهم}} + 0.5(\overbrace{3}^{\text{داده پنجاه و یکم}} - \underbrace{3}_{\text{داده پنجاهم}}) = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Md = 3}$$

البته با توجه به فراوانی تجمعی چون 50.5 در داخل جمعیت خانواده‌ای 3 نفری است، به راحتی می‌توانیم بدون محاسبه 3 را به عنوان میانه انتخاب کنیم.

۲ـ محاسبه میانه برای داده‌های طبقه‌بندی شده:

برای محاسبه میانه در داده‌های طبقه‌بندی شده به طریق زیر عمل می‌کنیم:

۱ـ از روی جدول، فراوانی تجمعی را محاسبه می‌کنیم.

۲ـ $\frac{N}{2}$ را بدست آورده، سپس در جدول اولین طبقه‌ای که مقدار فراوانی تجمعی (F_{C_i}) آن بیشتر یا مساوی $\frac{N}{2}$ است را به عنوان طبقه میانه‌دار انتخاب می‌کنیم.

۳ـ با استفاده از رابطه زیر مقدار میانه را بدست می‌آوریم:

$$\boxed{\text{میانه} : Md = Me = \text{حد پائین طبقه میانه‌دار} + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل میانه‌دار}}{\text{فراوانی مطلق طبقه میانه‌دار}}\right) \times \text{طول هر طبقه}}$$

توجه شود،به جای فراوانی مطلق طبقه میانه‌دار در مخرج می توانیم (فراوانی تجمعی طبقه ماقبل میانه ـ فراوانی تجمعی طبقه میانه‌دار) را محاسبه کنیم، اما تفاوتی با حالت قبلی ندارد.

مثال : میانه داده‌های زیر کدام است؟

حد پایین طبقه میانه‌دار

C – L	10-20	20-30	30-40	40-50	جمع
F_i	10	20	30	40	$N = \sum F_i = 100$
F_{C_i}	10	30	60	100	

فراوانی مطلق طبقه میانه‌دار

فراوانی تجمعی طبقه ماقبل

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل :

۱) فراوانی تجمعی در جدول فوق حساب شده است.

۲) طبقه 40 - 30 اولین طبقه‌ای است که فراوانی تجمعی‌اش بیشتر یا مساوی 50 می‌باشد.

$$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

۳) مقدار میانه با توجه به فرمول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Md = 30 + \frac{\left(\frac{100}{2} - 30\right)}{\underbrace{(60-30)}_{30}} \times 10 = 30 + \frac{20}{30} \times 10 = 36.66$$

نکته: همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در صورتیکه جدول دارای طبقات گسسته (ناپیوسته) باشد، باید به جدول با طبقات پیوسته تبدیل شود، بدین منظور کافی است، عبارت:

$$\left(\frac{\text{حدبالای طبقه ـ حد پائین طبقه بعدی}}{2} \right)$$

محاسبه شده و از حد پائین طبقات کم و به حد بالای طبقات اضافه نمائیم.

مثال : میانه جدول زیررا بدست آورید.

C – L	3-5	6-8	9-11	جمع
F_i	4	20	12	$\sum F_i = N = 36$

حل :

کافی است از حد پائین طبقات 0.5 کم و به حد بالای طبقات 0.5 اضافه شود تا جدول پیوسته شود: $\frac{6-5}{2} = 0.5$

۱)

C − L	2.5-5.5	5.5-8.5	8.5-11.5	جمع
F_i	4	20	12	$\sum F_i = N = 36$
F_{C_i}	4	24	36	

۲) محل میانه: اولین فراوانی تجمعی بیشتر یا مساوی $\frac{N}{2} = \frac{36}{2} = 18$ در طبقه 5.5-8.5 قرار دارد.

۳) مقدار میانه:

$$\text{مقدار میانه} = 5.5 + \frac{\left(\frac{36}{2} - 4\right)}{\underbrace{(24-4)}_{20}} \times \overbrace{(8.5 - 5.5)}^{\text{طول طبقه}} = 5.5 + \frac{14}{20} \times 3 = 7.6$$

● خواص مهم میانه

۱ـ در هر جامعه آماری فقط یک میانه وجود دارد.

۲ـ برخلاف میانگین، میانه از اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک متأثر نمی‌شود.

۳ـ مهم‌ترین خاصیت میانه این است که، مجموع قدرمطلق انحرافات از میانه همیشه می‌نیمم است، یعنی میانه، حاصل جمع قدرمطلق تفاضل‌های مقادیر از خود را به حداقل می‌رساند یعنی:

$$\sum |x_i - Md| < \sum |x_i - a| \text{ یا } \sum |x_i - Md| = \min \quad ; \quad \text{a عدد دلخواه است}$$

۴ـ چنانچه اندازه افرادی که در ابتدا و انتهای توزیع واقع شده‌اند، از سایر اندازه‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای تفاوت داشته باشند، بهتر است از میانه به عنوان پارامتر حد وسط استفاده کنیم. زیرا میانگین از حد وسط واقعی دور است.

۵ـ از لحاظ هندسی میانه طول خط عمودی است بر محور xها در نمودار بافت‌نگار که آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

۶ ـ در نمودار فراوانی تجمعی (اجایو) محل برخورد دو نمودار، فراوانی تجمعی کمتر از میانه و فراوانی تجمعی بیشتر از میانه، میانه را در اختیار قرار می‌دهد. می‌توان گفت میانه طول نقطه‌ای است که عرض آن 50% است.

۷ـ همانند میانگین، میانه نیز خاصیت خطی بودن را حفظ می‌کند، یعنی: $y = \pm ax \pm b \rightarrow Md_y = \pm aMd_x \pm b$

مثال ۱: کدام یک از عبارت‌های زیر می‌تواند یکی از خواص مهم میانه را در توزیع جامعه بیان کند؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) $\sum (X_i - me)^2$ ۲) $\sum (X_i - me)$ ۳) $\sum |X_i - me|$ ۴) $\sum (\overline{X} - me)$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مجموع قدرمطلق انحرافات از میانه همواره می‌نیمم است.

مثال ۲: در صورتی که به بزرگ‌ترین عدد یک سری داده مقدار ثابتی اضافه گردد، این افزایش بر کدام معیار تأثیر نمی‌گذارد؟

(اقتصاد ۸۰)

۱) ضریب پراکندگی ۲) میانه ۳) میانگین ۴) واریانس

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

50 درصد داده‌ها قبل و 50 درصد داده‌ها بعد از میانه قرار دارند، از این رو بزرگ یا کوچک بودن متغیرها تأثیری بر مقدار میانه نخواهد داشت.

○ مُد یا نما (MO)

متغیری که دارای بیشترین فراوانی است مد (نما) نامیده می‌شود. گفتنی است نما کم اهمیت‌ترین پارامتر مرکزی نیز به حساب می‌آید.

۱ـ محاسبه مد در داده‌های طبقه‌بندی نشده:

مد در این حالت داده‌ای است که فراوانی مطلق آن از سایر داده‌ها بیشتر است.

مثال :

1 و 1 و 3 و 4 و 5 MO = 1

1 و 1 و 3 و 2 و 2 MO = 1 و 2

1 و 1 و 2 و 2 MO = نداریم (چون تمام داده‌ها به یک اندازه تکرار شده‌اند)

۲ـ محاسبه مد در داده‌های طبقه‌بندی شده:

الف) ابتدا در ستون فراوانی مطلق طبقه‌ای را پیدا می‌کنیم که بیشترین فراوانی مطلق را دارد.

ب) سپس مقدار مد را از رابطه زیر بدست می‌آوریم:

$$\boxed{MO = \text{حد پائین طبقه مددار} + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times \text{طول طبقه}}$$

d_1 = فراوانی مطلق طبقه مددار ـ فراوانی مطلق طبقه ماقبل طبقه مددار

d_2 = فراوانی مطلق طبقه مددار ـ فراوانی مطلق طبقه بعداز طبقه مددار

مثال ۱: نظر گروهی از سوادآموزان راجع به زمان بخش برنامهٔ نهضت سوادآموزی از سیمای جمهوری اسلامی جمع‌آوری شده است. کدام شاخص مرکزی برای آن داده‌ها مناسب‌تر است؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) میانگین ۲) میانه ۳) نما ۴) چارک اول

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به آن‌که بیشترین فراوانی سنجیده می‌شود، مد (نما) مناسب‌ترین شاخص مرکزی برای داده‌هاست.

مثال ۲: در جدول زیر مد کدام مقدار است؟ (مدیریت ۸۲)

۱) 6.33 ۲) 6.53 ۳) 7.5 ۴) 20

C-L	3-5	6-8	9-11
F_i	4	20	12

حل : ابتدا جدول را پیوسته می‌کنیم:

C-L	2.5-5.5	5.5-8.5	8.5-11.5	جمع
F_i	4	20	12	N = 36

الف) مددار = (5.5-8.5) ← طبقه‌ای که دارای بیشترین فراوانی است.

ب) مقدار مد $= 5.5 + \frac{(20-4)}{(20-4)+(20-12)} \times 3 = 5.5 + \frac{16}{16+8} \times 3 = 7.5$

نکته :مد نیز همانند دیگر پارامترهای مرکزی خاصیت خطی بودن دارد یعنی:

$y = \pm ax \pm b \rightarrow Mo_y = \pm aMo_x \pm b$

مثال ۳: در جدول توزیع فراوانی زیر، مقدار مد و میانه به ترتیب (از چپ به راست) کدام است؟(حسابداری ـ ۸۰)

x_i	-1	0	1	2	3
فراوانی	10	30	10	25	25

۱) (0 ، 0.50)　　۲) (0 ، 1.5)　　۳) (25 ، 0.50)　　۴) (30 ، 25)

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

x_i	-1	0	1	2	3
فراوانی	10	30	10	25	25
F_{c_i}	10	40	50	75	100

محل میانه $= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{100}{2} + \frac{1}{2} = 50.5$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

داده پنجاهم داده پنجاهم

$$\text{مقدار میانه} = 1 + 0.5(2-1) = 1.5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Md = Me = 1.5}$$

داده پنجاه و یکم

مد متغیری است که دارای بیشترین فراوانی است، بنابراین صفر مد جدول است. $\Leftarrow$ $\boxed{Mo = 0}$

❍ تفاوت‌های اساسی بین میانگین، میانه و مد

۱) میانگین برحسب مقیاس داده‌ها است و در محاسبه آن فراوانی و کمیت داده، در نظر گرفته می‌شود، اما میانه و مد تابع ترتیب و فراوانی داده‌ها هستند.

۲) میانگین از ترکیب داده‌ها حاصل نشده و هر افزایش یا کاهش داده‌ها مقدار میانگین را عوض می‌کند، اما اگر افزایش یا کاهش ترتیب داده‌ها را عوض نکند در مقدار مد و میانه تأثیری ندارد.

❍ چندک‌ها (چارک‌ها ـ دهک‌ها ـ صدک‌ها)

چندک‌ها مقادیری از مشاهدات هستند که دامنهٔ تغییرات را در فواصل چندکی تقسیم می‌کنند. به طوری که فراوانی‌ها در هر یک از این فواصل، درصد معینی از فراوانی کل را تشکیل می‌دهد.

چارک‌ها: دامنهٔ تغییرات را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

دهک‌ها: دامنهٔ تغییرات را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

صدک‌ها: دامنهٔ تغییرات را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ محاسبهٔ چندک‌ها برای داده‌های طبقه‌بندی نشده :

الف) ابتدا داده‌ها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

ب) سپس با توجه به نوع چندک محل آن را با استفاده از:

چارک: $Q = \frac{aN}{4} + \frac{1}{2} \; ; \; a = 1,2,3$

دهک: $D = \frac{aN}{10} + \frac{1}{2} \; ; \; a = 1,2,\ldots,9$

صدک: $P = \frac{aN}{100} + \frac{1}{2} \; ; \; a = 1,2,\ldots,99$

پیدا می‌کنیم.

مثال : دهک چهارم داده‌های 9، 6، 2، 0، 4،1- چقدر است؟

مرتب‌سازی : -1 , 0 , 2 , 4 , 6 ,9

$$\text{محل دهک چهارم} = \frac{4\times 6}{10} + \frac{1}{2} = \frac{24}{10} + \frac{1}{2} = \frac{29}{10} = 2.9$$

داده دوم

$$\text{مقدار دهک چهارم} = \underset{\text{داده دوم}}{0} + 0.9(\underset{\text{داده سوم}}{2} - 0) = 1.8$$

۲ـ محاسبه چندک‌ها برای داده‌های طبقه‌بندی شده:

الف) ابتدا از روی جدول، فراوانی تجمعی را محاسبه می‌کنیم.

ب) با استفاده از $\frac{aN}{4}(a=1,2,3)$ یا $\frac{aN}{10}(1,2,\dots,9)$ یا $\frac{aN}{100}(1,2,\dots,99)$ اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی‌اش بیشتر یا مساوی یکی از مقادیر فوق باشد را با توجه به چارک، دهک یا صدک پیدا می‌کنیم.

ج) با استفاده از فرمول زیر آن را محاسبه می‌نماییم:

$$\text{چارک} = \text{مقدار چندک} = \text{حد پائین طبقه چارک‌دار} + \frac{(\frac{aN}{4} - \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل})}{\text{فراوانی مطلق طبقه چارک‌دار}} \times \text{طول طبقه}$$

$$\text{دهک} = \text{مقدار چندک} = \text{حد پائین طبقه دهک‌دار} + \frac{(\frac{aN}{10} - \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل})}{\text{فراوانی مطلق طبقه دهک‌دار}} \times \text{طول طبقه}$$

$$\text{صدک} = \text{مقدار چندک} = \text{حد پائین طبقه صدک‌دار} + \frac{(\frac{aN}{100} - \text{فراوانی تجمعی طبقه ماقبل})}{\text{فراوانی مطلق طبقه صدک‌دار}} \times \text{طول طبقه}$$

نکته :دهک پنجم = چارک دوم = صدک پنجاهم = میانه است.

مثال ۱: مطلوبست دهک دوم جدول زیر : (مدیریت ۸۰)

C – L	40-50	50-60	60-70
F_i	5	18	7

۱) 48.2 ۲) 51.5

۳) 50.55 ۴) 62.38

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

ابتدا باید فراوانی تجمعی جدول فوق را محاسبه نمائیم:

حد پائین طبقه دهک‌دار

C – L	40 – 50	50 – 60	60 – 70	
F_i	5	18	7	$N = \Sigma F_i = 30$
F_{c_i}	5	23	30	

فراوانی مطلق طبقه دهک‌دار

فراوانی تجمعی طبقه ماقبل

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل :

طبقه 60 – 50 ، محل دهک دوم می‌باشد. $\rightarrow$ $\frac{aN}{10} = \frac{2 \times 30}{10} = 6$: محل دهک دوم

$50 + \frac{(6-5)}{18} \times 10 = 50 + \frac{10}{18} = 50.55$:مقدار دهک دوم

مثال۲: مطلوب است محاسبه چارک اول در جدول زیر: (مدیریت ۷۸)

C-L	2-5	6-9	10-13
Fi	10	30	20

۱) 5 ۲) 6.17

۳) 9.5 ۴) 10

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

ابتدا طبقات گسسته جدول را به پیوسته تبدیل می‌کنیم و سپس فراوانی تجمعی را در جدول فوق محاسبه می‌نمائیم.

C-L	1.5-5.5	5.5-9.5	9.5-13.5	جمع
F_i	10	30	20	$N = \sum_{i=1}^{n} F_i = 60$
F_{c_i}	10	40	60	

طبقه 9.5 – 5.5 طبقه موردنظر است؛ چرا که اولین طبقه‌ای است که F_{c_i} آن بیشتر یا مساوی 15 می‌باشد.

$\frac{aN}{4} = \frac{1 \times 60}{4} = 15$: محل چارک اول

$5.5 + \frac{(15-10)}{30} \times 4 = 6.17$: مقدار چارک اول

❍ پارامترهای پراکندگی

به‌طور کلی پارامترهای پراکندگی معیارهایی برای تعیین میزان پراکندگی داده از یکدیگر یا میزان پراکندگی آن‌ها نسبت به میانگین است، که از پارامترهای پراکندگی می‌توان به دامنه تغییرات ـ دامنه میان چارکی ـ نیمه میان‌چارکی (انحراف چارکی) ـ انحراف متوسط از میانگین ـ واریانس ـ انحراف معیار ـ نیمه واریانس،اشاره نمود.

الف) دامنه تغییرات

ساده‌ترین پارامتر پراکندگی، دامنه تغییرات است. این شاخص با تفاضل کوچک‌ترین مشاهده از بزرگترین مشاهده محاسبه می‌شود، یعنی:

$$\boxed{R = \text{Max } x_i - \text{Min } x_i}$$

مثال : دامنهٔ تغییرات برای داده‌های 9 و 0 و 1 و 7 و 4 و 1- کدام است؟

مرتب‌سازی: 1- و 0 و 1 و 4 و 7 و 9 $\Rightarrow R = 9 - (-1) = 10$

● نکات مهم دامنه تغییرات

۱ـ دامنه تغییرات کم اهمیت‌ترین پارامتر پراکندگی است، زیرا تنها تابع تغییرات دو اندازه است و وضعیت اعداد وسط را مشخص نمی‌کند.

۲ـ دامنهٔ تغییرات علی‌رغم سادگی در محاسبه، از ثبات چندانی برخوردار نیست چون:

ـ در تعیین این شاخص، از مجموعه مشاهدات فقط به کوچکترین و بزرگترین مشاهده توجه می‌شود.

ـ با این شاخص چگونگی توزیع سایر مشاهدات نشان داده نمی‌شود، یعنی اگر داده‌ها به مقدار بزرگ‌تر یا مقدار کوچک‌تر نزدیک باشند، دامنه تغییرات این ویژگی مشاهدات را نشان نمی‌دهد.

ب) دامنه میان چارکی (IQR) :

دامنه تغییرات 50% از مشاهدات است. در این تعریف، میانه را که 50% داده‌هاست ملاک قرار داده و از پائین تا 25% و از بالا تا 75% گسترش می‌دهیم.به عبارت بهتر IQR چارک اول تا سوم را شامل می‌شود و برابر است با: $\boxed{IQR = Q_3 - Q_1}$

○ نیمه میان چارکی (انحراف چارکی، SIQR)

انحراف چارکی مساوی است با نصف دامنه میان چارکی، یعنی:

$$\boxed{SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{IQR}{2}}$$

● نکات مهم میان چارکی

۱ـ اصولاً انحراف چارکی از دامنه تغییرات و دامنه میان‌چارکی با ثبات‌تر است.

۲ـ در توزیع‌هائی که دارای تعداد اندکی مقدار در ابتدا و انتها هستند از انحراف چارکی به عنوان شاخص پراکندگی استفاده می‌شود.

۳ـ در توزیع‌های نامتقارن اغلب از میانه به عنوان شاخص مرکزی و از انحراف چارکی (SIQR) به عنوان شاخص پراکندگی استفاده می‌شود.

۴ـ اگر انحراف چارکی اندازه‌ها برابر صفر باشد، 50% اندازه‌هایی که در وسط قرار گرفته‌اند، با هم برابرند. در نتیجه چارک‌های اول و دوم و سوم با هم برابرند و برعکس، یعنی:

$$\boxed{Q = 0 \leftrightarrow Q_1 = Q_2 = Q_3}$$

مثال : کدام پارامتر پراکندگی برای توزیع فراوانی زیر مناسب‌تر است؟ (حسابداری ۸۰)

حدود طبقات	0-20	20-40	40 -60	60 و بیش از آن
فراوانی	25	35	30	10

۱) انحراف چارکی ۲) انحراف معیار ۳) ضریب تغییرات ۴) انحراف متوسط از میانگین

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون دارای تعداد کمی اطلاعات از 60 وبیش از آن است، انحراف چارکی مناسب‌ترین پارامتر پراکندگی برای این توزیع فراوانی می‌باشد. توجه کنید که میانه مناسب‌ترین پارامتر مرکزی برای آن می‌باشد.

ج) انحراف متوسط از میانگین (انحراف میانگین، انحراف متوسط، $A.D_\mu$)

هیچ‌کدام از شاخص‌هائی که تا به حال در مورد آن‌ها صحبت شده قادر به بیان تمامی تغییرات نیستند. تغییر زمانی مفهوم پیدا می‌کند که هر یک از داده‌ها نسبت به مبدأ مقایسه شوند و بهترین مبدأ یا مرکز داده‌ها میانگین است. اما از آن‌جا که مجموع انحرافات از میانگین همیشه صفر است، برای محاسبه انحراف متوسط از میانگین از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

داده‌های طبقه‌بندی نشده: $A.D_\mu = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu_x|}{N}$: (μ_x : میانگین و N : تعداد مشاهدات)

داده‌های طبقه بندی شده: $A.D_\mu = \dfrac{\sum F_i|x_i - \mu_x|}{N}$ یا $A.D_\mu = \sum f_i|x_i - \mu_x|$

● نکات مهم انحراف متوسط از میانگین

۱ـ این فرمول از علامت جبری داده‌ها صرف‌نظر می‌کند.

۲ـ تأثیر انحرافات بزرگ را در شرایطی که تعداد زیادی انحرافات کوچک در برابر تعداد کمی انحرافات بزرگ وجود داشته باشد، نشان نمی‌دهد. که نقص اساسی این پارامتر می‌باشد.

۳ـ در صورتی که تمام داده‌ها با هم برابر باشند انحراف متوسط از میانگین، صفر است: $x_1 = x_2 = ... = x_n \Leftrightarrow A.D_\mu = 0$

۴ـ اگر به متغیرها عدد ثابتی اضافه یا کم شود، انحراف متوسط تغییری نمی‌کند: $A.D(x \pm a) = A.D_\mu$

۵ـ اگر متغیرها را در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم کنیم، انحراف متوسط در قدر مطلق آن عدد ضرب یا بر قدرمطلق آن عدد تقسیم می‌شود.

$$A.D_{(\pm ax)} = |\pm a|.A.D_x$$
$$A.D_{\left(\frac{x}{\pm a}\right)} = \frac{A.D_x}{|\pm a|}$$

۶ ـ انحراف متوسط اعداد ثابت صفر است.

د) واریانس (پراش، σ_x^2، var (x) و D(x)) و انحراف معیار (σ_x)

یکی از شاخص‌های پراکندگی داده نسبت به میانگین، واریانس است. هنگام محاسبه انحراف متوسط از میانگین، برای جلوگیری از خنثی شدن انحرافات منفی از قدرمطلق استفاده می‌شود، اما در واریانس از مجذور انحرافات استفاده می‌کنیم که شاخص بهتری نسبت به انحراف متوسط از میانگین است.

واریانس و انحراف معیار می‌توانند تأثیرات انحرافات بزرگ را به راحتی نشان دهند، بنابراین بهترین شاخص برای نشان دادن انحرافات بزرگ هستند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ خواص واریانس

۱) واریانس اعداد مساوی صفر است.

۲) فرمول محاسبه:

محاسبهٔ واریانس برای داده‌های طبقه‌بندی نشده: $V(x)=\sigma_x^2=\frac{\sum(x_i-\mu_x)^2}{N}=\frac{\sum x_i^2}{N}-\left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2=\frac{\sum x_i^2}{N}-\mu_x^2$

محاسبه واریانس برای داده‌های طبقه‌بندی شده: $V(x)=\sigma_x^2=\frac{\sum F_i(x_i-\mu_x)^2}{N}=\frac{\sum F_i x_i^2}{N}-\left(\frac{\sum F_i x_i}{N}\right)^2=\frac{\sum F_i x_i^2}{N}-\mu_x^2$

$$V(x)=\sigma_x^2=\sum f_i\ (x_i-\mu_x)^2=\sum f_i\ x_i^2-\left(\sum f_i\ x_i\right)^2=\sum f_i x_i^2-\mu_x^2$$

● نکات مهم واریانس

۱ـ اگر همه متغیرها با هم برابر باشند یا اعداد ثابت داشته باشیم، واریانس و انحراف معیار صفر است.

۲ـ
$$\left.\begin{array}{l}\sigma^2(x\pm a)=V(x\pm a)=V(x)=\sigma_x^2\\ \sigma^2(\pm bx\pm a)=(\pm b)^2\sigma_x^2\\ \sigma^2\left(\frac{x}{\pm a}\right)=\frac{\sigma_x^2}{(\pm a)^2}\end{array}\right\}\Leftarrow \text{انحراف معیار}\left\{\begin{array}{l}\sigma(x\pm a)=\sigma_x\\ \sigma(\pm bx\pm a)=|\pm b|\sigma_x\\ \sigma=\left(\frac{x}{\pm a}\right)=\frac{\sigma_x}{|\pm a|}\end{array}\right.$$

۳ـ **محاسبه واریانس یک نمونه n تائی:** اگر واریانس نمونه مورد نظر باشد، در مخرج کسر تمامی فرمول‌های واریانس، به جای n از (n-1) استفاده می‌شود. یعنی:

$$V(x)=S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]$$

۴ـ واحد اندازه‌گیری واریانس، مجذور واحد اصلی متغیر است، بنابراین اگر x برحسب ریال اندازه‌گیری شده باشد، واحد واریانس جامعه، ریال به توان 2 خواهد بود.

۵ـ در مقایسه دو یا چند جامعهٔ آماری، آن‌که انحراف معیارش کم‌تر است، مقادیر صفات متغیر مورد مطالعه آن جامعه یکنواخت‌تر از جامعه‌های دیگر می‌باشد.

مثال ۱: مطلوبست واریانس و انحراف معیار داده‌های زیر:

12451 , 12452 , 12453 , 12454 , 12455

حل : برای محاسبه واریانس چند داده می‌توانیم قسمت مشترک را حذف کنیم بنابراین واریانس داده‌های زیر را محاسبه می‌کنیم.

1 , 2 , 3 , 4 , 5

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$\sigma^2 = 2$ در نتیجه انحراف معیار $\sigma = \sqrt{2}$

مثال ۲: مطلوبست واریانس و انحراف معیار داده‌های: 2 , 2 , 2 , 2 , 2

حل : واریانس و انحراف معیار داده‌های مساوی، صفر است.

مثال ۳: مطلوبست واریانس و انحراف معیار نمونه‌های: 5 , 4 , 3 , 2 , 1

حل : با توجه به نکته ۳ داریم:

$$1)\ \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$2)\ S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(5-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2}{4} = \frac{4+1+0+1+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

مثال ۴: واریانس داده‌ها با جدول فراوانی زیر کدام است؟(حسابداری ۷۷)

x_i	-1	0	1	2
F_i	2	3	4	1

۱) 0.76 ۲) 0.78 ۳) 0.82 ۴) 0.84

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum F_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{2(-1)^2 + 3(0)^2 + 4(1)^2 + 1(2)^2}{2+3+4+1} - \left(\frac{2(-1)+3(0)+4(1)+1(2)}{2+3+4+1}\right)^2 = \frac{10}{10} - \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{10}{10} - \frac{16}{100} = 0.84$$

مثال۵: حقوق پرداختی به کارمندان شرکت آلفا به طور متوسط 15 هزار تومان با انحراف معیار 3 هزار تومان است. اگر 20% میانگین به حقوق کارمندان اضافه شود، به ترتیب میانگین و انحراف معیار حقوق پرداختی چقدر خواهد شد؟ (اقتصاد ۷۰)

۱) 15.3، 3 ۲) 15.3، 3.6 ۳) 18، 3 ۴) 18، 3.6

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

واریانس آن تغییری نمی‌کند اما به میانگین حقوق کارمندان اضافه می‌شود. زمانی که 20% میانگین به حقوق کارمندان اضافه شود داریم: $15 \times \frac{20}{100} = 3$ ؛ لذا به میانگین 3 هزار تومان اضافه شده و میانگین حقوق به 18 هزار تومان می‌رسد و انحراف معیار بدون تغییر باقی خواهد ماند.

$$\mu(x+3) = \mu_x + 3 = 15 + 3 = 18$$

$$\sigma_{x+3} = \sigma_x = 3$$

مثال۶: اگر μ_x میانگین x_1، x_2، ... ، x_N باشد. واریانس مشاهدات $\left(-\frac{x_1}{2}+3\right)$، $\left(-\frac{x_2}{2}+3\right)$، ... ، $\left(-\frac{x_N}{2}+3\right)$ کدام است؟

(حسابداری ۸۱)

۱) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2$ ۲) $-\frac{1}{2}\sigma_x^2+3$ ۳) $\frac{1}{4}\sigma_x^2+3$ ۴) $\frac{1}{4}\sigma_x^2$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

علامت ضریب، منفی است که وقتی بیرون از واریانس می‌آید، مثبت می‌شود.

$$\sigma\left(\frac{-x}{2}+\cancel{3}_{0}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^2\sigma^2(x)=\frac{1}{4}\sigma^2{}_x$$

مثال ۷: جدول مقابل توزیع فراوانی فروش یک شرکت را نشان می‌دهد. میانگین و انحراف معیار فروش به ترتیب چقدر است؟

(اقتصاد ۷۰)

فروش به هزار تومان	تعداد روزها
20 تا کم‌تر از 30	10
30 تا کم‌تر از 40	25
40 تا کم‌تر از 50	15

۱) 35 ، 8.6
۲) 36 ، 5.7
۳) 36 ، 7
۴) 35 ، 9

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

C-L	x_i	F_i	F_ix_i	$F_ix_i^2$
20-30	25	10	250	6250
30-40	35	25	875	30625
40-50	45	15	675	30375
جمع			1800	67250

$$x_i = \frac{\text{حد بالا + حد پایین}}{2} \quad \text{(مرکز طبقات)}$$

$$\bar{x}=\frac{\sum F_ix_i}{N}=\frac{(10\times25)+(25\times35)+(15\times45)}{10+25+15}=\frac{250+875+675}{50}=\frac{1800}{50}=36$$

$$\text{var}(x)=\sigma_x^2=\frac{\sum F_ix_i^2}{N}-\left(\frac{\sum F_ix_i}{N}\right)^2=\frac{67250}{50}-\left(\frac{1800}{5}\right)^2=1345-1296=49$$

$$\sigma_x^2=49\rightarrow\sigma_x=7$$

مثال۸: کدام یک از پارامترهای زیر بیش‌تر تحت تأثیرات انحرافات بزرگ است؟ (حسابداری ۸۲)

۱) واریانس ۲) نیم‌دامنه ۳) انحرافات چارکی ۴) انحراف متوسط از میانگین

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

واریانس بیش از سایر پارامترها تحت تأثیر انحرافات بزرگ قرار دارد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۹: میانگین قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای 120 سانتی‌متر با واریانس 100 است. اگر هر فرد 14% قدش در سال آینده بلند شود، میانگین و واریانس قد آن‌ها در سال آینده (از راست به چپ) چقدر خواهد بود؟ (حسابداری ۸۲)

۱) 120 و 100 ۲) 114 و 120 ۳) 114 و 136.8 ۴) 136.8 و 129.96

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\mu_{(x+\%14x)} = \mu_{(1.14x)} = 1.14\mu_x = 1.14 \times 120 = 136.8$$

$$\sigma^2(x+0.14x) = \sigma^2(1.14x) = (1.14)^2\sigma^2(x) = 1.2996 \times 100 = 129.96$$

مثال : دستگاه A در اندازه‌گیری مکرر از شیء واحدی دارای واریانس $\sigma^2 = 9$ بوده است. دستگاه B در اندازه‌گیری مکرر از همان شیء دارای واریانس $\sigma^2 = 25$ بوده است؟ (مدیریت ۷۴)

۱) دستگاه A دقیق‌تر است.

۲) دستگاه B دقیق‌تر است.

۳) دستگاه A اندازه‌گیری‌های بزرگ‌تری از دستگاه B به دست می‌دهد.

۴) دستگاه B اندازه‌گیری‌های بزرگ‌تری از دستگاه A به دست می‌دهد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

واریانس برای مقایسه دوجامعه وقتی به کار می‌رود که:

1) $\mu_1 = \mu_2$

و

2) واحد اندازه‌گیری دوجامعه یکسان باشد.

با حفظ دو شرط بالا وقتی واریانس (انحراف معیار) جامعه‌ای کمتر است، پراکندگی جامعه کمتر، خطا کمتر، دقت بیشتر و کارایی بیشتر است.

در این سوال دو شرط فوق برقرار بوده در نتیجه دستگاه A که دارای واریانس کمتری است دقت بیشتری دارد.

○ میانگین و واریانس کل چند جامعه آماری

اگر K جامعه با تعداد مشاهدات N_1 و $N_2,\ldots,N_k$ و با میانگین‌های $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$ باشد و دارای واریانس‌های $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots,\sigma_k^2$ باشد آنگاه میانگین و واریانس کل داده‌های آماری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\mu_x = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2 + \cdots + N_k\mu_k}{N_1 + N_2 + \cdots + N_K} = \frac{\sum N_i\mu_i}{N}}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sigma_i^2 N_i + \sum_{i=1}^{K} N_i(\mu_i - \mu_x)^2}{N_1 + N_2 + \cdots + N_K} = \frac{\sum \sigma_i^2 N_i}{N} + \frac{\sum N_i(\mu_i - \mu_x)^2}{N}} \; ; \; \sum N_i = N_1 + \ldots + N_k = N$$

نکته: از روابط فوق استنتاج می‌شود که هرگاه چند جامعه به صورت یک جامعه کل ترکیب شوند، واریانس این جامعه بزرگتر از میانگین واریانس جوامع تشکیل‌دهندهٔ آن خواهد بود و فقط در صورتی که میانگین جوامع با هم برابر باشند، واریانس جامعه کل با میانگین واریانس جوامع تشکیل‌دهنده برابر می‌شود، یعنی:

$$\boxed{\sigma^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \sigma_i^2}{N} \quad ; \quad N = N_1 + N_2 + \cdots + N_K}$$

مثال ۱: میانگین نمرات آمار و واریانس آن‌ها در دو کلاس به صورت زیر است:

کلاس	1	2
تعداد دانشجو N_i	20	30
میانگین نمرات μ_i	15	10
واریانس نمرات σ_i^2	17	12

میانگین و واریانس نمرات کل دانشجویان دو کلاس چقدر است؟ (اقتصاد ۸۱)

۱) 12.5 و 20 ۲) 12 و 20 ۳) 12.5 و 35 ۴) 12 و 35

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\mu_{\text{کل}} = \frac{N_1\mu_1 + N_2\mu_2}{N_1 + N_2} = \frac{20\times15 + 30\times10}{20+30} = 12$$

$$\sigma^2_{\text{کل}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\sigma_i^2}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i(\mu_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2_{\text{کل}} = \frac{20\times17 + 30\times12}{20+30} + \frac{20(15-12)^2 + 30(10-12)^2}{20+30} = \frac{340+360}{50} + \frac{180+120}{50} = 14 + 6 = 20$$

مثال ۲: مطلوبست میانگین و واریانس کل داده‌های آماری زیر:

N_i	100	200	700
μ_i	80	90	100
σ_i^2	1600	2500	2500

حل :

$$\mu = \frac{100\times80 + 200\times90 + 700\times100}{100+200+700} = \frac{96000}{1000} = 96 \Rightarrow \boxed{\mu = 96}$$

$$\sigma^2 = \frac{(100\times1600 + 200\times2500 + 700\times2500) + \left[100\ (80-96)^2 + 200\ (90-96)^2 + 700\ (100-96)^2\right]}{100+200+700}$$

$$= \frac{2410000 + 44000}{1000} = 2454 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma^2 = 2454}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

هـ) نیمه واریانس: (S.V)

یکی از شاخص‌های پراکندگی است که برای استخراج انحرافات نامناسب و نامطلوب به کار می‌رود. در داده‌های مربوط به سود، مقادیر کوچکتر از میانگین و در داده‌های مربوط به زیان، مقادیر بزرگتر از میانگین نامطلوب هستند. بنابراین نیمه واریانس عبارتست از متوسط مجذور مقادیر نامطلوب.

$$S.V = \frac{\sum_{i=1}^{K} (x_i - \mu)^2}{K}$$

در این فرمول فرض بر آن است که مشاهدات $x_1 , \dots , x_N$ در جامعه موجود هستند و فقط Kتای آن‌ها نامطلوب هستند. $(K < N)$

❍ پارامترهای پراکندگی نسبی:

❍ ضریب پراکندگی (ضریب تغییرات) (CV) :

عبارتست از نسبت انحراف معیار به میانگین:

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

توجه کنید که در شرایط زیر از معیار ضریب پراکندگی استفاده می‌کنیم که میانگین و واریانس فاقد آن هستند:

۱) دو یا چند جامعه در مقایسه با هم دارای مشاهدات ناهمگون از نظر واحد اندازه‌گیری می‌باشند. مانند: یک جامعه برحسب متر و یک جامعه بر حسب اینچ

گاهی نیز مقیاس صفت مورد اندازه‌گیری در دو جامعه یکسان است، ولی بزرگی مشاهدات آن‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای تفاوت دارد. مانند: مقایسه پراکندگی سود و زیان در صنایع دستی با صنایع سنگین.

۲) زمانی که دو یا چند جامعه دارای میانگین‌های متفاوتی باشند.

● نکات مهم ضریب تغییرات

۱ـ ضریب تغییرات اعداد ثابت، برابر صفر است: (a عدد ثابت دلخواه است) : $CV(a) = 0$

۲ـ اگر همهٔ متغیرها با هم برابر باشند، ضریب تغییرات برابر صفر است و برعکس.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N \Leftrightarrow \sigma_x = 0 \Leftrightarrow CV_x = 0$$

۳ـ اگر به متغیرها عدد ثابتی مانند a را اضافه یا کم کنیم، ضریب تغییرات عبارتست از:

$$CV(x \pm a) = \frac{\sigma(x \pm a)}{\mu(x \pm a)} = \frac{\sigma_x}{\mu_x \pm a}$$

۴ـ اگر متغیرها را در عدد ثابتی ضرب کنیم، ضریب تغییرات عبارتست از:

$$CV(ax) = \frac{\sigma_{(ax)}}{\mu_{(ax)}} = \frac{|a|\sigma_x}{a\mu_x} =$$

اگر a مثبت باشد: $CV(x)$

اگر a منفی باشد: $-CV(x)$

۵ـ اگر متغیرها را بر عدد ثابتی مانند a تقسیم کنیم، ضریب تغییرات عبارتست از:

$$Cv\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{\sigma\left(\frac{x}{a}\right)}{\mu\left(\frac{x}{a}\right)}=\frac{\frac{\sigma_x}{|a|}}{\frac{\mu_x}{a}}=$$

اگر a مثبت باشد: $CV(x)$

اگر a منفی باشد: $-CV(x)$

۶ ـ ضریب تغییرات واحد ندارد.

۷ـ در مسائل اقتصادی از بین دو جامعه آن جامعه‌ای که cv اش کمتر است بهتر است.

۸ ـ فرمول‌های دیگر ضریب پراکندگی عبارتند از:

- **درصد ضریب پراکندگی** $\boxed{CV\times 100=\frac{\sigma_x}{\mu_x}\times 100}$
- **ضریب پراکندگی از میانگین:** $\boxed{\frac{\frac{\sum|x_i-\mu|}{N}}{\mu}}$
- **ضریب پراکندگی از میانه:** $\boxed{\frac{\frac{\sum|x_i-Md|}{N}}{Md}}$
- **ضریب پراکندگی از مد:** $\boxed{\frac{\frac{\sum|x_i-MO|}{N}}{MO}}$
- **واریانس نسبی:** $\boxed{VR=\frac{\sigma^2}{\mu^2}}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: برای تعیین آن‌که در 30 روز گذشته، به نسبت، قیمت دلار از ثبات بیش‌تری برخوردار بوده است یا یورو، استفاده از کدام شاخص آماری مناسب‌تر است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) انحراف متوسط ۲) ضریب پراکندگی ۳) ضریب چولگی ۴) واریانس

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

زمانی که دو یا چند جامعه در مقایسه با هم دارای مشاهدات ناهمگون از نظر واحد اندازه‌گیری باشند، یا زمانی که دو یا چند جامعه دارای میانگین‌های متفاوتی باشند از ضریب تغییرات (ضریب پراکندگی) استفاده می‌کنیم که میانگین و واریانس فاقد آن هستند.

ضریب پراکندگی برای مقایسهٔ این دو جامعه مناسب‌ترین شاخص می‌باشد.

مثال ۲: میانگین 20 داده آماری 15 و واریانس آن‌ها برابر 2.25 است. درصد ضریب تغییرات آن‌ها چقدر است؟(حسابداری ۷۷)

۱) 10 ۲) 12 ۳) 15 ۴) 20

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$CV=\frac{\sigma_x}{\mu_x}=\frac{\sqrt{\sigma^2{}_x}}{\mu_x}=\frac{\sqrt{2.25}}{15}=\frac{1.5}{15}=0.1$$

درصد ضریب تغییرات $=CV\times 100=0.1\times 100=10$

مثال ۳: ضریب تغییرات (Coefficient of Variation)عدد 5 برابر است با: (اقتصاد ۷۴)

۱) 5 ۲) 1 ۳) ∞ ۴) 0

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

واریانس عدد ثابت صفر است پس انحراف معیار آن نیز صفر خواهد شد. همچنین میانگین یا امید ریاضی هر عدد نیز مساوی خود عدد می‌باشد، بنابراین:

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{0}{5} = 0$$

مثال۴: با فرض این که داشته باشیم $\sum_{i=1}^{3} X_i = 3$ و $\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 6$ ، ضریب تغییرات کدام است؟ (حسابداری ۸۰)

۱) 0.5 ۲) 1 ۳) 1.5 ۴) 2

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{\sqrt{\sigma_x^2}}{\bar{x}} = \frac{1}{1} = 1 \\ \mu_x = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{3}{3} = 1 \\ \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu_x = \frac{6}{3} - 1 = 1 \Rightarrow \sigma_x = 1 \end{cases}$$

مثال۵: میانگین سن یک گروه 12 سال و ضریب تغییرات سن آنان 20 درصد است. انحراف معیار سن آنان چقدر است؟ (مدیریت ۷۹)

۱) 0.6 ۲) 2.4 ۳) 60 ۴) 240

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \rightarrow \sigma_x = CV \times \mu_x = \frac{20}{100} \times 12 = 2.4$$

مثال۶: اگر میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی x به ترتیب 1 و 2 باشد، درصد ضریب تغییرات y=x+3 چقدر است؟

۱) %25 ۲) %50 ۳) %75 ۴) %100

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{\sigma_x}{\mu_x + 3} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\% \\ \sigma(x+3) = \sigma_x \\ \mu(x+3) = \mu_x + 3 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۷: متوسط درآمد ماهانه کارگران کارخانه A ، 17 هزار تومان با واریانس 4 می‌باشد. در کارخانه B متوسط درآمد ماهانه 250 هزار ریال با واریانس 900 می‌باشد. (مدیریت ۷۴)

۱) اختلاف درآمد در کارخانه A بیش از کارخانه B است.

۲) اختلاف درآمد در کارخانه B بیش از کارخانه A است.

۳) درآمدهای اکثر افراد کارخانه A کم‌تر از اکثر افراد کارخانه B است.

۴) کم‌ترین درآمد در کارخانه A بیش از کارخانه B است.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

واحدهای اندازه‌گیری و میانگین‌ها برابر نیستند بنابراین برای مقایسه بین دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم.

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\mu_A} = \frac{2}{17} \times 100 = 11.76$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\mu_B} = \frac{30}{250} \times 100 = 12$$

و چون $CV_A < CV_B$ است یعنی پراکندگی در کارخانه B بیشتر ا ست و اختلاف درآمد در کارخانه B بیش از کارخانه A است.

مثال۸: میانگین و انحراف معیار حقوق در یک سازمان به ترتیب 50 هزار تومان و 20 هزار تومان است اگر حقوق‌ها در این سازمان 25 درصد افزایش یابند، ضریب تغییرات حقوق چه خواهد شد؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) نصف خواهد شد

۲) تغییر نخواهد کرد

۳) چهار برابر خواهد شد

۴) 25 درصد افزایش خواهد یافت

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} CV = \frac{\sigma_x}{\mu_x} = \frac{1.25\sigma_x}{1.25\mu_x} = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \\ \mu(x+0.25x) = \mu(1.25x) = 1.25\mu(x) \\ \sigma(x+0.25x) = \sigma(1.25x) = 1.25\sigma(x) \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ گشتاورها

برای توضیح شاخص ضریب چولگی که یکی از معیارهای تعیین شکل توزیع از لحاظ قرینگی می‌باشد، ابتدا باید مفهوم گشتاورها بیـان شود.

گشتاورها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱ـ گشتاور حول نقطه دلخواه a (گشتاورهای عمومی)

۲ـ گشتاور حول مبدأ صفر (گشتاورهای اولیه)

۳ـ گشتاور حول میانگین (گشتاورهای مرکزی)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ گشتاور حول نقطه دلخواه a (گشتاورهای عمومی)

گشتاور مرتبه n ام نسبت به عدد دلخواه a به صورت‌های زیر نوشته می‌شود.

داده‌های طبقه‌بندی نشده : $M_n(a) = \dfrac{\sum (x_i - a)^n}{N}$

داده‌های طبقه بندی شده: $M_n(a) = \dfrac{\sum F_i (x_i - a)^n}{N} = \sum f_i (x_i - a)^n$

اگر در گشتاورهای عمومی $n = 1, 2, 3, 4$ را جایگذاری کنیم، گشتاورهای مراتب اول، دوم، سوم و چهارم به دست خواهد آمد:

$$M_1(a) = \frac{\sum (x_i - a)}{N} \qquad n = 1 \qquad M_2(a) = \frac{\sum (x_i - a)^2}{N} \qquad n = 2$$

$$M_3(a) = \frac{\sum (x_i - a)^3}{N} \qquad n = 3 \qquad M_4(a) = \frac{\sum (x_i - a)^4}{N} \qquad n = 4$$

۲ـ گشتاور حول مبدأ صفر (گشتاورهای اولیه)

گشتاور مرتبه n ام نسبت به مبدأ صفر به شرح زیر تعریف می‌شود:

با جایگذاری $a = 0$ در رابطه گشتاورهای عمومی، گشتاورهای اولیه به دست می‌آیند.

داده‌های طبقه‌بندی نشده : $m_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} X_i^n}{N}$

داده‌های طبقه‌بندی شده: $m_n = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{F_i x_i^n}{N} = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i^n$

اگر در گشتاورهای اولیه $n = 1, 2, 3, 4$ را جایگذاری کنیم، گشتاورهای مراتب اول، دوم، سوم و چهارم به دست خواهد آمد:

$$m_1 = \frac{\sum x_i}{N} = \mu_x \qquad n = 1 \;,\; m_2 = \frac{\sum x_i^2}{N} \qquad n = 2$$

$$m_3 = \frac{\sum x_i^3}{N} \qquad n = 3 \;,\; m_4 = \frac{\sum x_i^4}{N} \qquad n = 4$$

در حالت کلی می‌توان به این نتیجه رسید که:

$$\boxed{m_n = E\left(x^n\right)}$$

نکته :گشتاور مرتبه اول نسبت به مبدأ صفر برابر میانگین حسابی است. یعنی:

$$\boxed{m_1 = \mu_x = \bar{x}}$$

۳ـ گشتاور حول میانگین (گشتاورهای مرکزی)

گشتاور مرتبه n ام نسبت به میانگین به شرح زیر تعریف می‌شود:

با جایگذاری $a = \bar{x}$ در رابطه گشتاورهای عمومی، گشتاورهای مرکزی به دست می‌آیند.

داده‌های طبقه‌بندی نشده : $\mu_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^n}{N}$

داده‌های طبقه‌بندی شده : $\mu_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} F_i (x_i - \mu)^n}{N} = \sum_{i=1}^{N} f_i (x_i - \mu)^n$

نکته :گشتاور مرتبه اول نسبت به میانگین برابر صفر و گشتاور مرتبه دوم نسبت به میانگین برابر واریانس می‌باشد، یعنی:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_1 = 0 \\ &\mu_2 = \sigma_x^2 = \mathrm{var}(x) \end{aligned}}$$

بنا به نکته فوق داریم:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2 = E\left(x^2\right) - \left(E(x)\right)^2}$$

● نکات مهم گشتاورها

۱ـ گشتاورهای آماری نسبت به مبدأ صفر و نسبت به میانگین حسابی حالات خاصی از گشتاورهای آماری نسبت به نقطه دلخواه a می‌باشند.

۲ـ به کمک گشتاورهای آماری می‌توان معیارها و پارامترها و فرمول‌های آماری را به طور ساده و خلاصه بیان کرد.

۳ـ گشتاور مرتبه اول نسبت به مبدأ صفر برابر میانگین حسابی می‌باشد. یعنی؛ $\boxed{m_1 = \bar{x}}$

۴ـ گشتاور مرتبه اول نسبت به میانگین برابر صفر است. یعنی: $\boxed{\mu_1 = 0}$

۵ ـ گشتاور مرتبه دوم نسبت به میانگین برابر واریانس می‌باشد. یعنی؛ $\boxed{\mu_2 = \sigma^2}$

۶ ـ گشتاورهای آماری را می‌توان طبق روابطی به هم تبدیل نمود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

الف ـ رابطه تبدیل بین گشتاورهای عمومی به گشتاورهای مرکزی:

$$\boxed{\mu_n = (M - M_1)^n}$$

$$\mu_1 = (M - M_1)^1 = M_1 - M_1^1 = M_1 - M_1 = 0$$

$$\mu_2 = (M - M_1)^2 = M_2 - 2M_1M_1^1 + M_1^2 = M_2 - 2M_1^2 + M_1^2 = M_2 - M_1^2$$

$$\mu_3 = (M - M_1)^3 = M_3 - 3M_2M_1^1 + 3M_1M_1^2 - M_1^3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$$

$$\mu_4 = (M - M_1)^4 = M_4 - 4M_3M_1^1 + 6M_2M_1^2 - 4M_1M_1^3 + M_1^4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$$

ب ـ رابطه تبدیل بین گشتاورهای عمومی به گشتاورهای اولیه:

$$\boxed{m_n = (M + a)^n}$$

$$m_1 = (M + a) = M_1 + a$$

$$m_2 = (M + a)^2 = M_2 + 2aM_1 + a^2$$

$$m_3 = (M + a)^3 = M_3 + 3aM_2 + 3a^2M_1 + a^3$$

$$m_4 = (M + a)^4 = M_4 + 4aM_3 + 6a^2M_2 + 4a^3M_1 + a^4$$

ج ـ رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاورهای مرکزی:

$$\boxed{\mu_n = (m - m_1)^n}$$

$$\mu_1 = (m - m_1)^1 = m_1 - m_1 = 0$$

$$\mu_2 = (m - m_1)^2 = m_2 - 2m_1m_1^1 + m_1^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\mu_3 = (m - m_1)^3 = m_3 - 3m_2m_1^1 + 3m_1m_1^2 - m_1^3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = (m - m_1)^4 = m_4 - 4m_3m_1^1 + 6m_2m_1^2 - 4m_1m_1^3 + m_1^4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$$

د ـ رابطه تبدیل بین گشتاورهای اولیه به گشتاروهای عمومی:

$$\boxed{M_n = (m - a)^n}$$

$$M_1 = (m - a)^1 = m_1 - a$$

$$M_2 = (m - a)^2 = m_2 - 2am_1 + a^2$$

$$M_3 = (m - a)^3 = m_3 - 3am_2 + 3a^2m_1 - a^3$$

$$M_4 = (m - a)^4 = m_4 - 4am_3 + 6a^2m - 4a^3m_1 + a^4$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال: در جامعه‌ای به حجم n=10 کمیت‌های زیر محاسبه شده است:

$$\sum F_i x_i = 40, \sum F_i x_i^2 = 400, \sum F_i x_i^3 = 600$$

گشتاوری مرکزی مرتبه سوم (μ_3) کدام است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) -292 ۲) 292 ۳) -548 ۴) 485

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به آن‌که بین گشتاور مرکزی و گشتاور حول مبدا رابطه $\mu_n = (m - m_1)^n$ برقرار است داریم:

$$\mu_3 = (m - m_1)^3 = m_3 - m_1^3 - 3m_2m_1 + 3m_1m_1^2 = m_3 - m_1^3 - 3m_2m_1 + 3m_1^3 = m_3 + 2m_1^3 - 3m_2m_1$$

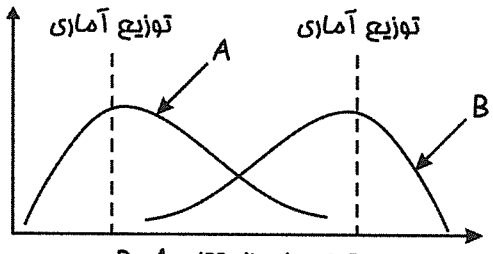
$$m_1 = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{40}{10} = 4 \quad , \quad m_2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{N} = \frac{400}{10} = 40 \quad , \quad m_3 = \frac{\sum F_i x_i^3}{N} = \frac{600}{10} = 60$$

بنابراین می‌توان گفت:

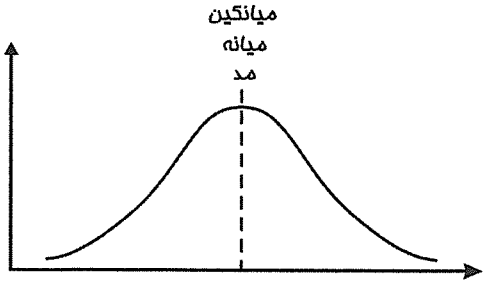
$$\mu_3 = m_3 + 2m_1^3 - 3m_2m_1 = 60 + 2(4)^3 - 3(40)(4) = 60 + 128 - 480 = -292$$

○ چولگی (عدم قرینگی، ضریب انحراف توزیع از حالت قرینگی)

در مقایسه دو یا چند جامعه با یکدیگر ابتدا از پارامترهای مرکزی استفاده می‌شود. اما در صورت تساوی برخی از پارامترهای مرکزی (مانند: میانگین) اختلاف جوامع آماری به کمک شاخص‌های پراکندگی (مانند: انحراف معیار) مشخص می‌گردد. گاهی پارامترهای پراکندگی نیز به علت مساوی بودن جوابگو نیستند. بنابراین برای رفع این مشکل از معیاری به نام چولگی (skewness) استفاده می‌کنیم. برای مثال در شکل زیر دو توزیع دارای میانگین و واریانس مساوی هستند، اما توزیع یکسانی ندارند. توزیع جامعه A دارای تراکم در حول وحوش مبدأ مختصات است، در حالی که مد جامعه B در نقطه مقابل آن قرار دارد. این تفاوت را چولگی (skewness) یا انحراف از قرینگی می‌گویند. چولگی توزیع‌ها در مقایسه با توزیع متقارن معین می‌شود. توزیع متقارن توزیعی است که پارامترهای مرکزی آن (مد، میانگین و میانه) با همدیگر مساوی باشند. هر چه یک توزیع با توزیع متقارن تفاوت بیشتری داشته باشد، انحراف از قرینگی آن بیشتر خواهد بود.



توزیعهای نامتقارن A و B



توزیع زنگی شکل و متقارن

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ ضریب چولگی (Sk)

شاخص اندازه‌گیری پارامترهای تعیین انحراف از قرینگی، ضریب چولگی است که با Sk نمایش داده می‌شود. توجه کنید که این معیار بدون واحد است. برای محاسبه ضریب چولگی از فرمول‌های زیر استفاده می‌شود:

$$SK = \frac{\mu_3}{\sigma^3_x} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^3}{N}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\mu)^3}{N}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\mu)^2}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i-\mu)^3}{\left(\sum_{i=1}^{N}f_i(x_i-\mu)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ضریب چولگی به طریقه گشتاورها : فرمول (1)

دو فرمول مهم، به نام فرمول‌های پیرسون به صورت زیر وجود دارد:

$$SK_1 = \frac{(\bar{x}-MO)}{\sigma_x}$$: ضریب چولگی اول پیرسون : فرمول (2)

$$SK_2 = \frac{3(\bar{x}-Md)}{\sigma_x}$$: ضریب چولگی دوم پیرسون: فرمول (3)

$$Sk_Q = \frac{Q_3-2Q_2+Q_1}{Q_3-Q_1}$$: ضریب چولگی چارکی: فرمول (4)

$$Sk_p = \frac{p_{90}-2p_{50}+p_{10}}{p_{90}-p_{10}}$$: ضریب چولگی صدکی : فرمول (5)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته :زمانی که چولگی توزیع متعادل یا متناسب یا خفیف باشد، فرمول‌های پیرسون با یکدیگر برابر شده و رابطه زیر را به وجود می‌آورند:

$$\bar{x}-MO=3(\bar{x}-Md)$$

● انواع چولگی

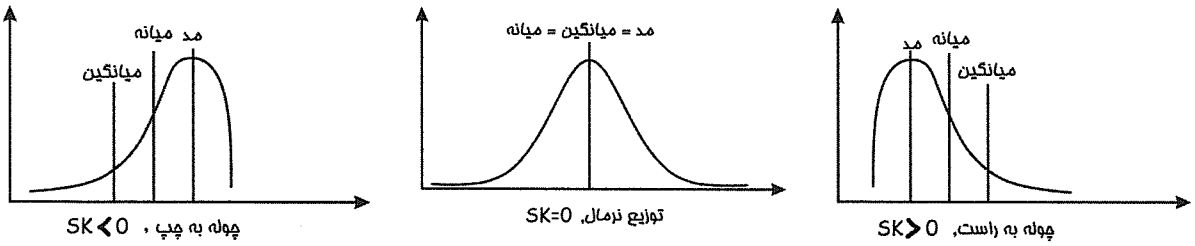
۱ـ چوله به راست (تمایل توزیع به سمت چپ)

۲ـ چوله به چپ (تمایل توزیع به سمت راست)

چوله به راست: در توزیع‌هایی که ضریب چولگی مثبت دارند ($Sk > 0$)، چوله به راست می‌باشد یعنی $Mo<Md<\mu_x$

چوله به چپ: در توزیع‌هایی که ضریب چولگی منفی دارند ($Sk < 0$)، چوله به چپ می‌باشد یعنی $Mo>Md>\mu_x$

به شکل‌های زیر توجه کنید:



● تفسیر ضریب چولگی

قدرمطلق ضریب چولگی نشاندهنده میزان اختلاف جامعه آماری با توزیع نرمال از نظر قرینگی است. بدیهی است هر چه |SK| بزرگتر باشد، تفاوت جامعه از نظر قرینگی با توزیع نرمال بیشتر خواهد بود. طوری که:

۱ـ تقریباً چولگی وجود ندارد و جامعه از نظر قرینگی تقریباً نرمال است.	$\lvert SK \rvert \le 0.1$
۲ـ چولگی موجود، اندک ولی غیر قابل اغماض است در حقیقت جامعه از نظر قرینگی دارای تفاوت اندکی با توزیع نرمال است.	$0.1 < \lvert SK \rvert \le 0.5$
۳ـ چولگی زیاد و غیر قابل اغماض است. به عبارت دیگر جامعه از نظر قرینگی دارای تفاوت فاحشی با توزیع نرمال است.	$\lvert SK \rvert > 0.5$

مثال ۱: در صورتی که جامعه‌ای دارای چولگی مثبت باشد: (اقتصاد ۷۳)

۱) میانه در وسط، میانگین سمت راست و نما سمت چپ آن قرار دارد.

۲) میانگین در وسط، میانه سمت راست و نما سمت چپ آن قرار دارد.

۳) میانه در وسط، نما سمت راست و میانگین سمت چپ آن قرار دارد.

۴) میانگین در وسط، نما سمت راست و میانه سمت چپ آن قرار دارد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در جامعه‌ای با چولگی مثبت، همواره رابطه $Mo < Md < \bar{x}$ برقرار است.

مثال ۲: در توزیعی با چولگی منفی انتظار می‌رود که ..... کم‌ترین مقدار را داشته باشد. (اقتصاد ۸۱)

۱) دامنه تغییرات ۲) میانه ۳) میانگین ۴) نما

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در جامعه‌ای با چولگی منفی همواره رابطه $\bar{x} < Md < Mo$ برقرار است.

مثال ۳: در یک توزیع با چولگی خفیف، میانگین حسابی $\bar{X} = 52.4$ و میانه $Me = 51.8$ به دست آمده است.مد توزیع کدام است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) 53.6 ۲) 50.6 ۳) 54.2 ۴) 51.6

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

اگر توزیعی دارای چولگی خفیف باشد، همواره رابطه $\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Md)$ بین سه مشخص‌کننده مرکزی برقرار است. بنابراین:

$$(52.4 - Mo) = 3(52.4 - 51.8) \rightarrow Mo = 50.6$$

مثال۴: اگر $N = 10$ ، $\sum (x_i - \mu_x)^2 = 40$ و $\sum (x_i - \mu_x)^3 = 80$ باشد، مقدار ضریب چولگی چقدر است؟ (مدیریت ۷۹)

۱) -3 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 1

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$SK = \frac{\mu_3}{\sigma^3_x} = \frac{\frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\sqrt{\left(\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}\right)^3}} = \frac{\frac{80}{10}}{\sqrt{\left(\frac{40}{10}\right)^3}} = \frac{8}{8} = 1$$

مثال۵: اگر ضریب چولگی توزیع یک جامعه 0.66- باشد، آن‌گاه جامعه مورد مطالعه: (مدیریت ۷۰)

۱) نرمال است.
۲) با جامعهٔ نرمال تفاوت مختصری دارد.
۳) با جامعهٔ نرمال تفاوت فاحش دارد.
۴) با اطلاعات داده شده نمی‌توان قضاوت کرد.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$|SK| = 0.66 \Rightarrow |SK| > 0.5 \Rightarrow$ با جامعهٔ نرمال تفاوت فاحش دارد.

○ کشیدگی و ضریب کشیدگی

کشیدگی معیاری است بدون واحد که ارتفاع منحنی را مورد بحث قرار می‌دهد و رابطه معکوس با پراکندگی دارد.

چنانچه داده‌ها دارای طبقه‌بندی مشخص و کمی باشند، بهترین روش برای محاسبه کشیدگی استفاده از گشتاورهاست.

برای محاسبه کشیدگی توزیع‌ها از رابطه زیر استفاده می‌شود:

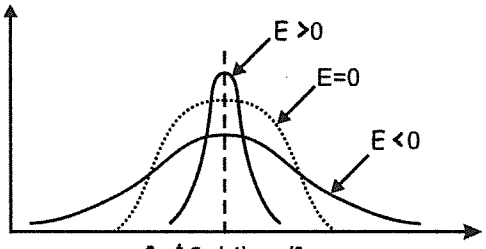
$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{\sum (x_i - \mu)^4}{N}}{(\text{واریانس})^2} = \frac{\frac{\sum F_i (x_i - \mu)^4}{N}}{(\text{واریانس})^2}$$ **؛ کشیدگی (گشتاوری)**

در این رابطه μ_4 گشتاور مرتبه چهارم نسبت به میانگین و $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ نشاندهنده کشیدگی هر توزیع دلخواه است.

معیار ضریب کشیدگی اختلاف کشیدگی توزیع‌ها را نسبت به کشیدگی توزیع نرمال بدست می‌آورد.

نکته :کشیدگی گشتاوری توزیع نرمال همیشه 3 است و کشیدگی چندکی توزیع نرمال 0.263 می‌باشد.

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$ **؛ ضریب کشیدگی**



مقایسه انواع کشیدگی

● تفسیر ضریب کشیدگی:

چنانچه $E = 0$ باشد، کشیدگی توزیع هم اندازه و هم ارتفاع توزیع نرمال است.
چنانچه $E>0$ باشد، کشیدگی توزیع از نرمال بلندتر و پراکندگی آن از نرمال کمتر است.
چنانچه $E<0$ باشد، کشیدگی توزیع از نرمال کوتاه‌تر و پراکندگی آن از نرمال بیشتر است.

قدرمطلق ضریب کشیدگی میزان اختلاف ارتفاع را با توزیع نرمال بیان می‌کند:

- اگر $|E| \le 0.1$ باشد، توزیع جامعه از نظر پراکندگی تقریباً نرمال است.
- اگر $0.1 < |E| \le 0.5$ باشد، توزیع از نظر کشیدگی دارای تفاوت اندکی با توزیع نرمال است. اما غیر قابل اغماض است.
- اگر $|E| > 0.5$ باشد، توزیع از نظر کشیدگی اختلاف فاحش با توزیع نرمال دارد و تفاوت غیرقابل اغماض است.

مثال ۱: اگر $\sum F_i (x_i - \mu_x)^4 = 5000 , N = 1000$ و انحراف معیار جامعه 2 باشد، مقدار ضریب کشیدگی کدام است؟

(مدیریت ۷۸)

۱) -2.69 ۲) 2.53 ۳) 0.31 ۴) 2.53

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{\dfrac{\sum F_i (x_i - \mu)^4}{N}}{(\sigma^2)^2} - 3 = \dfrac{\dfrac{5000}{1000}}{(4)^2} - 3 = -2.69 \\ \sigma_x = 2 \rightarrow \sigma^2 = 4 \end{cases}$$

مثال ۲: کشیدگی (Kurtosis) چندکی و گشتاوری توزیع نرمال به ترتیب (از چپ به راست) کدام است؟

۱) (0 و 0) ۲) (3 و 0.263) ۳) (0.263 و 0.263) ۴) (3 و 3)

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

کشیدگی چندکی توزیع نرمال همواره مساوی 0.263 و کشیدگی گشتاورزی توزیع نرمال همیشه برابر 3 می‌باشد.

❍ نمایش هندسی مشاهدات:

- برای نمایش توزیع‌های فراوانی، اغلب از نمودارها استفاده می‌شود.
- برای نمایش داده‌ها با توجه به نوع مقیاس داده‌ها، روش‌های مختلفی وجود دارد:

۱ـ نمودارهای کمی برای مقیاس‌های نسبی و فاصله‌ای استفاده می‌شود.

۲ـ نمودارهای کیفی برای مقیاس‌های اسمی و رتبه‌ای استفاده می‌شود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته: مهمترین نمودارهای کمی و کیفی به شرح زیر هستند.

●نمودارهای کمی:

۱) نمودار بافت‌نگار (Histogram chart)

۲) نمودار چندضلعی

۳) نمودار فراوانی تجمعی (اجایو) (ogive) (cumulative frequency chart)

۴) نمودارهای تحلیل اکتشافی داده‌ها
- a) شاخه و برگ
- b) جعبه‌ای (box)

● نمودارهای کیفی :(وصفی)

۱) نمودار ستونی (میله‌ای) (bar chart)

۲) نمودار دایره‌ای (pie Chart)

۳) نمودار پارتو (pareto chart)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل دوم

آنالیز ترکیبی و احتمال

○آنالیز ترکیبی

این بحث شامل **فاکتوریل، اصل ضرب (شمارش)، ترتیب** (جایگشت)، **تبدیل** و **ترکیب** است.

• فاکتوریل

فاکتوریل عدد n برابر است با حاصلضرب اعداد طبیعی از یک تا n و آن را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\cdots \times 2 \times 1}$$

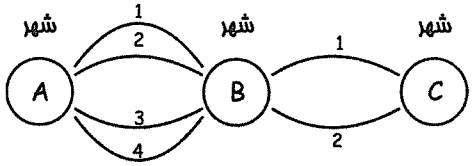
نکته : فاکتوریل عدد صفر، برابر یک است یعنی:

$$\boxed{0! = 1}$$

• اصل ضرب (اصل اساسی شمارش)

هرگاه عملی را بتوان به n طریق مختلف و عمل دیگری را به m طریق مختلف انجام داد. انجام هر دو فعل با هم را می‌توان به $n \times m$ طریق مختلف انجام داد.

شخصی می‌خواهد از شهر A به شهر C مسافرت کند و بایستی حتماً از شهر B عبور کند. یعنی عمل مسافرت این شخص در دو مرحله انجام می‌گیرد. اگر مسافرت از شهر A به شهر B به 4 طریق و از شهر B به شهر C به 2 طریق ممکن باشد، مسافرت از شهر A به شهر C به چند طریق ممکن است؟



حل : این عمل بنا به اصل ضرب به $4 \times 2 = 8$ طریق ممکن می‌باشد.

ردیف	سؤال و حل
a)	چند عدد چهار رقمی داریم؟ **حل :** هر یک از اعداد 0 تا 9 (10 عدد) می‌توانند در ارزش‌های یکان، دهگان و صدگان قرار گیرند، فقط عدد صفر نمی‌تواند در ارزش هزارگان باشد بنابراین: هزارگان صدگان دهگان یکان ⑨ × ⑩ × ⑩ × ⑩ = 9000
b)	چند عدد چهاررقمی با ارقام زوج داریم؟ **حل :** انتخاب‌ها فقط از میان ارقام زوج 8 و 6 و 4 و2 و0 می‌باشد فقط رقم صفر در مکان هزارگان قرارنمی‌گیرد بنابراین: هزارگان صدگان دهگان یکان ④ × ⑤ × ⑤ × ⑤ = 500
c)	چند عدد چهاررقمی با ارقام یکان و هزارگان یکسان داریم؟ **حل :** توجه کنید که ابتدا باید ارقام مکان‌های یکان و هزارگان مشخص شود و چون مکان هزارگان دارای محدودیت است (رقم صفر نمی‌تواند در هزارگان قرار گیرد) ابتدا تکلیف مکان هزارگان را مشخص می‌کنیم و هر عددی که در مکان هزارگان قرار گیرد در مکان یکان نیز قرار می‌گیرد بنابراین فقط 1 انتخاب برای ارزش یکان داریم: هزارگان صدگان دهگان یکان ⑨ × ⑩ × ⑩ × ① = 900
d)	چند عدد چهاررقمی داریم که فقط ارقام یکان و هزارگان یکسان دارند؟ **حل :** توجه کنید که انتخاب ارقام یکان و هزارگان مانند حالت قبل است، اما با توجه به کلمهٔ **فقط،** ارقام دهگان و صدگان نیز نه با آن‌ها یکسانند و نه با خودشان. بنابراین: هزارگان صدگان دهگان یکان ⑨ × ⑨ × ⑧ × ① = 648
e)	چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام داریم؟ هزارگان صدگان دهگان یکان ⑨ × ⑨ × ⑧ × ⑦ = 4536

f)	چند عدد چهاررقمی زوج بدون تکرار ارقام داریم؟ **حل** : حل این مسأله به صورت انجام یک عمل ضرب امکان‌پذیر نیست لذا بایستی این مسأله را به دو نوع مجزا تقسیم نموده و هر نوع را با اصل ضرب حل کرد، سپس دو مقدار بدست آمده را جمع کنیم، بنابراین: هزارگان صدگان دهگان یکان تعداد اعدادی که با رقم **صفر** زوج می‌شوند. → $\overset{\downarrow}{9} \times \overset{\downarrow}{8} \times \overset{\downarrow}{7} \times \overset{\downarrow}{1} = 504$ تعداد اعدادی که با رقم **غیرصفر** زوج می‌شوند. → $8 \times 8 \times 7 \times 4 = 1792$ دقت شود در اعدادی که با رقم غیرصفر زوج می‌شوند،4 انتخاب برای یکان داریم و 8 انتخاب برای هزارگان. چون عدد صفر و رقمی که در یکان به کار برده می‌شود حق انتخاب برای هزارگان را ندارند، بعد از آن که دو رقم استفاده شده است به ترتیب 8 و 7 انتخاب برای صدگان و دهگان داریم. بنابراین: $504 + 1792 = 2296$
g)	چند عدد چهاررقمی داریم که فقط سه رقم یکان و دهگان و صدگان یکسان دارند؟ **حل** : 9 انتخاب برای هزارگان داریم (همه اعداد به غیر از صفر)، بنابراین 1 رقم از دست می‌رود، 9 انتخاب نیز برای صدگان داریم، پس از مشخص شدن رقم صدگان، ارقام دهگان و یکان نیز خودبه‌خود مشخص شده‌اند بنابراین حق انتخاب 1 رقم برای این مکان‌ها داریم. بنابراین: هزارگان صدگان دهگان یکان $\overset{\downarrow}{9} \times \overset{\downarrow}{9} \times \overset{\downarrow}{1} \times \overset{\downarrow}{1} = 81$

• ترتیب (جایگشت)

منظور از جایگشت n شیء متمایز این است که آن اشیاء را به چند طریق مختلف می‌توان کنار هم قرار داد.

حالت‌های مختلفی که در جایگشت می‌توان بحث کرد به صورت زیر می‌باشد:

۱ـ جایگشت در یک ردیف

تعداد ترتیب یا جایگشت n شیء متمایز در یک صف کنار یکدیگر برابر است با:

$$\boxed{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!}$$

6 نفر و 6 صندلی در یک ردیف داریم. اگر یک نفر از بین این 6 نفر (نفر مشخصی) روی یکی از صندلی‌ها بنشیند، بقیه به چند حالت می‌توانند برروی صندلی‌های باقی‌مانده بنشینند؟

حل : $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

۲ـ جایگشت مدور (دایره‌ای)

تعداد جایگشت‌های n شی متمایز را روی محیط یک منحنی بسته، ترتیب دایره‌ای می‌گویند که برابر است با:

$$\boxed{(n-1)!}$$

مثال ۱: 4 نفر به چند طریق می‌توانند بر دور یک میز بنشینند؟

حل : چون در مثال به کلمهٔ « دور میز» اشاره شده است داریم:

$$(4-1)! = 3! = 6$$

نکته : در جاسوئیچی‌ها و تسبیح‌های n تایی، چون می‌توان آن‌ها را برگرداند، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

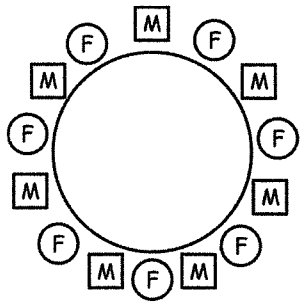
$$\boxed{\frac{(n-1)!}{2}}$$

نکته : اگر n شیء و m شیء را بخواهیم یک در میان روی یک منحنی بسته (دایره) بچینیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{m!(n-1)!}$$

مثال ۲: تعداد حالات نشستن 5 مرد و 5 زن، دور یک میز به طور یک در میان را بدست آورید؟

$$(5!)(4!)$$



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

توجه کنید در صورتی که تعداد مردها 5 و تعداد زن‌ها 4 باشد نمی‌توان آن‌ها را یکی در میان دور میز قرار داد اما می‌توان در یک ردیف یک در میان به صورت $5!\,4!$ قرار داد. MFMFMFMFM

واگر تعداد مردها 5 و تعداد زن‌ها 3 باشد به هیچ شکل نمی‌توان آن‌ها را یکی در میان قرار داد، نه دور یک میز و نه در یک ردیف.

نکته : اگر بخواهیم مردها و زن‌ها متناوباً کنار هم قرار بگیرند، حداکثر اختلاف بین تعداد زن‌ها و مردها در شرایطی که می‌خواهیم یکی در میان در یک ردیف بنشینند 1 باید باشد.

۳ـ جایگشت با تکرار (افرازهای مرتب)

تعداد ترتیب یا جایگشت n شیء که n_1 تای آن از نوع اول و n_2 تای آن از نوع دوم و $\cdots n_k$ تای آن از نوع k ام باشد برابر است با:

$$\boxed{\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad , \quad n_1+n_2+\cdots+n_k=n}$$

مثال ۱: با حروف کلمهٔ «حسابداری» چند کلمهٔ 8 حرفی می‌توان نوشت؟

حل : این کلمه شامل 8 حرف می‌باشد که حرف «ا»، دوبار تکرار شده است. بنابراین:

$$\frac{8!}{2!} = 20160$$

مثال ۲: با حروف کلمهٔ «حسابداری» چند کلمه 4 حرفی می‌توان نوشت؟

حل : چون تعداد حروف متمایز کلمهٔ حسابداری، 7 حرف می‌باشد اما در مسئله، یک کلمهٔ 4 حرفی مطرح شده است، بنابراین ابتدا باید 4 حرف از بین 7حرف انتخاب کرد و در تعداد جایگشت‌های این 4 حرف ضرب کرد، جواب حاصل تعداد کلماتی است که در آن‌ها یک بار حرف «ا» آمده است. سپس باید کلماتی را در نظر بگیریم که حرف«ا» دوبار در آن‌ها تکرار شده است، بنابراین به غیر از حرف «ا»، 2 حرف دیگر باقی می‌ماند که باید از بین 6 حرف انتخاب کرد و در تعداد جایگشت‌های آن ضرب کرد. جواب حاصل تعداد کلماتی است که در آن‌ها دوبار حرف «ا» آمده است و در نهایت باید دو جواب بدست آمده را با یکدیگر جمع کرد.

$$\underbrace{\binom{7}{4} \times 4!}_{\text{تعداد کلمات 4 حرفی دارای یک حرف «ا»}} + \underbrace{\binom{6}{2} \times \frac{4!}{2!}}_{\text{تعداد کلمات 4 حرفی دارای دو حرف «ا»}}$$

۴ـ تعداد تقسیمات n شیء در k سلول به طوری که n_1 تای آن‌ها در سلول اول و n_2 تای آن‌ها در سلول دوم و ... n_k تای آن‌ها در سلول k ام قرار گیرد. برابر است با:

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_k!}}$$

مثال ۱: به چند طریق می‌توان 9 نفر کارمند را در یک اتاق 4 نفره، یک اتاق 3 نفره و یک اتاق 2 نفره چیدمان کرد؟(مدیریت ۸۲)

۱) 1400 ۲) 1260 ۳) 72 ۴) 24

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان 9 اسباب‌بازی را بین 4 بچه تقسیم کرد به شرط آن که به کوچک‌ترین بچه 3 اسباب‌بازی و به هر کدام از بچه‌های دیگر 2 اسباب‌بازی برسد؟ (حسابداری ۸۰)

۱) 27 ۲) 108 ۳) 5674 ۴) 7560

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560$$

۵ـ تبدیل

اگر در انتخاب r شیء از n شیء، ترتیب اهمیت داشته باشد، تعداد صورت‌های مختلف این ترتیب‌ها را با نماد P_n^r نشان می‌دهند که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ; n \geq r}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

توجه کنید که دو ترتیب وقتی متمایز خواهند بود که یا مجموعهٔ اشیاء به کار رفته در آن‌ها متفاوت باشد و یا در صورت یکسان بودن ترتیب آن‌ها متفاوت باشد.

نکته : اگر کمی دقت کنید، در حالت خاص، اگر $n = r$ ، آن‌گاه داریم:

$$\boxed{P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!}$$

که همان حالت اول یعنی جایگشت می‌باشد.

اگر 9 نفر در یک مسابقه شرکت کنند به چند طریق ممکن است جوایز اول و دوم و سوم را دریافت کنند؟(مدیریت ۷۹)

۱) 84 ۲) 504 ۳) 635 ۴) 3024

حل : چون ترتیب جوایز مهم است، بنابراین:

$$P_9^3 = \frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۶ـ ترتیب‌های ناسازگار

اگر سه حرف a و b و c مفروض باشند، به هر ترتیب قرارگرفتن سه حرف مذکور به طوری که هیچ‌یک از آن‌ها در جایگاه فعلیشان قرار نگیرند، ترتیب ناسازگار گفته می‌شود.

a . تعداد ترتیب‌های ناسازگار n شیء متمایز برابر است با:

$$\boxed{n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

b . تعداد ترتیب‌های ناسازگار r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$\boxed{P_n^r \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times r! \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!} = C_n^r \times r! \sum_{k=0}^{r} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

توجه کنید که r ناسازگاری برای $n - r$ سازگاری است.

مثال۱: 3 نفر که پالتوهای خود را درمحلی آویزان کرده‌اند، به تصادف، یک پالتو برمی‌دارند. مطلوبست تعداد حالاتی که هیچ‌یک از آن‌ها پالتوی خود را بر نداشته باشند؟

حل :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 3! \sum_{k=0}^{3} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 6 \times \frac{2}{6} = 2$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۲: برای 10 نفر، 10 نامه می‌فرستیم. مطلوب است تعداد حالاتی که فقط 7 نفر نامه خودشان را دریافت نمایند.

حل : فقط 7 نفر نامه خودشان را دریافت کنند یعنی 3 نفر نامه خودشان را دریافت نکنند بنابراین:

$$\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{10!}{(10-3)!}\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{k!}=720\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=240$$

• ترکیب

ترکیب عبارت است از انتخاب r شیء از n شیء، در صورتی‌که ترتیب اشیاء مطرح نباشد که به دو صورت **بدون جایگذاری** و **باجایگذاری** می‌باشد.

انتخاب r شیء از n شیء بدون جایگذاری: $C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

انتخاب r شیء از n شیء با جایگذاری : n^r

مثال۱: تعداد نمونه‌های سه‌تایی با جایگذاری و بدون جایگذاری از جامعه‌ای که دارای 5 عنصر است به ترتیب کدام است؟(اقتصاد 76)

۱) 125 و 5 ۲) 125 و 10 ۳) 243 و 10 ۴) 243 و 20

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بدون جایگذاری: $C_n^r=C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$

با جایگذاری: $n^r=5^3=125$

مثال۲: انتخاب 3 دانشجو از بین 10 دانشجو به طوری که:

a) به عنوان شاگردان ممتاز (ترتیب اهمیت ندارد)

b) به عنوان شاگرد اول، دوم، سوم (ترتیب اهمیت دارد)

حل :

الف) $C_{10}^3=\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=120$

ب) $P_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=720$

• نکات مهم ترکیب

۱-	$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ ؛	$C_n^0=C_n^n=1$
۲-	$\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ ؛	$C_n^1=C_n^{n-1}=n$
۳-	$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ ؛	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$
٤-	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ؛	$C_n^r=C_n^{n-r}$
٥-	$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$ ؛	$C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

عبارت $C_{n+1}^{r} + 2C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2}$ را ساده کنید.

حل : $C_{n+1}^{r} + 2C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2} = \underbrace{C_{n+1}^{r} + C_{n+1}^{r-1}}_{\text{نکته ۵}} + \underbrace{C_{n+1}^{r-1} + C_{n+1}^{r-2}}_{\text{نکته ۵}} = C_{n+2}^{r} + C_{n+2}^{r-1} = C_{n+3}^{r}$

۶) تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول (نفر) برابر است با:

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{n}}$$

تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول بطوریکه در هر سلول حداقل r شیء قرار گیرد.

$$\boxed{\binom{n-k(r-1)-1}{k-1}}$$

تعداد تقسیمات n شیء مشابه در k سلول بطوریکه در هر سلول حداقل 1شیء قرار گیرد.

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$$

مثال ۱: به چند طریق می‌توان 35 سیب مشابه را بین 4 نفر تقسیم کرد؟

حل :

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{35+4-1}{4-1} = \binom{38}{3} = \frac{38!}{3!\,35!} = 8436$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان 8 خودکار سبز و 11 خودکار آبی و 5 خودکار قرمز را بین 3 نفر تقسیم کرد؟

حل :

$$\binom{8+3-1}{3-1}\binom{11+3-1}{3-1}\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}\binom{13}{2}\binom{7}{2} = 73710$$

توجه کنید، اگر بخواهیم هر نفر حداقل یک رنگ از هر خودکار داشته باشد، داریم:

$$\binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \binom{8-1}{3-1}\binom{11-1}{3-1}\binom{5-1}{3-1} = \binom{7}{2}\binom{10}{2}\binom{4}{2} = 21 \times 45 \times 6 = 5670$$

۷ـ با n شیء می‌خواهیم ترکیب‌هایی حداکثر r تایی و حداقل 1 تایی که در آن‌ها تکرار مجاز است بسازیم، تعداد حالات ممکن عبارت است از:

$$\boxed{n + n^2 + n^3 + \ldots + n^r = \frac{n^r - 1}{n-1} \times n}$$

با عددهای 4 و 3 و 2 و 1 و 6 چندعدد حداکثر 10 رقمی می‌توانیم بسازیم ؟

حل :

$$\begin{matrix} r = 10 \\ n = 5 \end{matrix} \Rightarrow 5^1 + 5^2 + \ldots + 5^{10} = \frac{5^{10} - 1}{5 - 1} \times 5$$

یکی از کاربردهای ترکیب، استفاده آن در بسط چند جمله‌ای‌ها می‌باشد.

• نکات مهم بسط چندجمله‌ای:

۱ـ فرمول کلی

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

$$(x_1 + \cdots x_k)^n = \Sigma \binom{n}{n_1 \cdots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

۲ـ جمله عمومی (جملهٔ $p+1$ ام):

$$C_n^p a^{n-p} b^p$$

۳ـ اگر در فرمول کلی به جای $a = b = 1$ قرار دهیم تساوی زیر به دست می‌آید:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی ؛

اگر در فرمول کلی به جای $a = 1$ و $b = -1$ قرار دهیم، تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots = 0 \Rightarrow$$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$$

۴ـ تعداد جملات بسط برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} \quad \text{یا} \quad \binom{n+k-1}{n}$$

۵ـ ضریب هر جمله مانند $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

۶ ـ برای محاسبه مجموع ضرایب بسط یک چند جمله‌ای می‌توان **بجای مجهولات عدد یک** قرار داد.

نکته : به طور کلی در مسائلی که تعویض در ترتیب اشیاء، در نتیجهٔ حاصل تغییری ایجاد نکند از ترکیب استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از ترتیب، به عنوان مثال در مسائلی مانند: انتخاب چندنماینده از بین چندنفر، انتخاب چند شیء از میان اشیاء مختلف، مخلوط نمودن رنگ‌های مختلف به منظور ایجاد رنگ‌های جدید و ..... از ترکیب استفاده می‌کنیم.

○احتمال (Probability)

برای بیان مفهوم احتمال، ابتدا باید عناوین زیر مطرح شود:

• آزمایش

در نظریهٔ احتمال فعالیتی که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد به آزمایش معروف است.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

• فضای نمونه

مجموعه پیامدهای ممکن یک آزمایش را فضای نمونه آن آزمایش گویند. به عنوان مثال:

فضای نمونهٔ پرتاب دوسکه، اگر ظاهر شدن شیر را با H وخط را با T نشان دهیم، عبارت است از:

$$S = \{HH , HT , TH , TT\}$$

• فضای نمونه محدود و نامحدود

هنگامی که تعداد اعضای فضای نمونه‌ای **نامتناهی** باشد، آن فضای نمونهٔ نامحدود است مانند: شرکتی را در نظر بگیرید که لامپ تولید می‌کند. مأمور کنترل کیفیت این شرکت می‌خواهد آن‌قدر لامپ آزمایش کند تا به اولین لامپ معیوب برسد. فضای نمونه عبارت است از:

$S = \{1 , 2 , 3 , \cdots\}$

اگر فضای نمونه تعداد محدودی عضو داشته باشد، فضای نمونه موردنظر محدود است مانند فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه:

$S = \{H , T\}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

• فضای نمونهٔ گسسته و پیوسته

ـ فضای نمونهٔ گسسته

فضای نمونه‌ای که شامل **تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی** ولی **شمارش پذیر** است را گویند. مانند: فضای نمونهٔ پرتاب یک سکه، یک تاس که تعداد عناصر فضای نمونهٔ آن‌هامتناهی است و فضای نمونهٔ تعداد لامپ‌های انتخاب شده تا اولین لامپ معیوب که نامتناهی ولی شمارش‌پذیر است.

ـ فضای نمونهٔ پیوسته

فضای نمونه‌ای برخی از آزمایش‌ها که گسسته نباشد و در طول یک پاره خط تعریف شود اصطلاحاً آن را فضای نمونهٔ پیوسته گویند. مانند: مدت زمانی که کارگری برای کار روی قطعه‌ای صرف می‌کند.

• پیشامد

یکی از زیرمجموعه‌های فضای نمونه است. مثلاً در پرتاب یک سکه، خط آمدن یک پیشامد است و شیرآمدن پیشامد دیگری است.

توجه کنید که اگر در آزمایش نوعی تقارن وجود داشته باشد که مطمئن باشیم وقوع یک پیامدهمان قدر امکان دارد که وقوع هر پیامد مقدماتی دیگر، می‌گوئیم فضای نمونه دارای پیشامدهای اولیه یا **پیامدهای مقدماتی هم شانس(هم‌تراز)** است. مثلاً در پرتاب یک سکه سالم، دو پیامد مقدماتی مختلف (شیر و خط) وجود دارد که امکان وقوع هر یک با دیگری برابر است؛ یعنی امکان وقوع هر کدام $\frac{1}{2}$ است.

○ احتمال

اندازه امکان وقوع حادثه A را با P(A) نشان داده که احتمال حادثه بوده یا به عبارت دیگر شانس وقوع پیشامد خاصی را گویندکه $0 \le P(A) \le 1$.

○ انواع بیان احتمال

۱ـ احتمال کلاسیک

احتمال وقوع پیشامد خاصی مانند A عبارت است از تعداد عضوهای پیشامد A (تعداد حالات مساعد) به تعداد عضوهای فضای نمونه (تعداد حالات ممکن).

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد}}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

توجه کنید که همهٔ پیامدهای مقدماتی، شانس مساوی برابر انتخاب شدن دارند.

۲ـ احتمال هندسی

این احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A) = \frac{\text{طول، سطح یا حجم مساعد}}{\text{طول، سطح یا حجم کل}}$$

۳ـ احتمال آماری

در آزمایشاتی که پیامدهای مقدماتی **هم شانس نمی‌باشند**، تعریف احتمال به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{فراوانی نسبی پیشامد } A = \frac{\text{تعداد دفعاتی که } A \text{ در } N \text{ تکرار آزمایش روی می‌دهد}}{N}$$

در صورتی می‌توان از فراوانی نسبی به عنوان مبنای احتمال استفاده کرد که **تعداد تکرارهای آزمایش (N)** به سمت **بی‌نهایت** میل کند بنابراین:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} (\text{فراوانی نسبی پیشامد } A \text{ در } N \text{ تکرار}) = \lim f_i$$

مثال ۱: یک قفل رمزدار از سه رقم 0 تا 9 تشکیل یافته است (ارقام نمی‌توانند تکرار شوند). رمزی را به تصادف امتحان کنیم، احتمال آن‌که قفل باز شود چقدر است؟

حل :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد مساعد}}{\text{تعداد کل حالات}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(S) =$ تعداد کل حالات $= 10 \times 9 \times 8 = 720$

$n(A) =$ تعداد مساعد $= 1 \rightarrow$ فقط یکی از رمزها قفل را باز می‌کند.

$P(A) = \frac{1}{720}$ ؛ احتمال کلاسیک

مثال ۲: در صورتی‌که یک نقطه داخل یک مربع به ضلع 2 انتخاب شود، احتمال آن‌که داخل دایره‌ای به شعاع 1 محاط باشد، چیست؟

حل :

$$p(A) = \frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\pi r^2}{L^2} = \frac{\pi \times (1)^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$ ؛ احتمال هندسی

حوادث از نقطه نظر احتمال وقوع عبارتند از:

۱) غیرممکن	:	$P(A)=0$	
۲) تصادفی	:	$0<P(A)<1$	$\Leftarrow \quad 0 \le P(A) \le 1$
۳) یقینی (حتمی)	:	$P(A)=1$	

حوادث با هم به صورت‌های زیر درنظر گرفته می‌شوند:

۱) حوادث هم‌تراز
۲) حوادث مستقل
۳) حوادث ناسازگار

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ حوادث هم‌تراز (هم‌شانس)

به حوادثی که احتمال وقوع یکسان وبرابر با هم را داشته باشند حوادث هم‌تراز (هم‌شانس) می‌گوئیم.

نتایج پرتاب یک تاس:
$$\begin{cases} P(A_i)=\frac{1}{6} \\ i=1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

نتایج پرتاب یک سکه:
$$\begin{cases} P(A_i)=\frac{1}{2} \\ i=\text{خط و شیر} \end{cases}$$

نکته : حوادث به طور پیش‌فرض هم‌تراز فرض می‌شوند و n حادثه هم‌تراز به طور پیش‌فرض هر کدام احتمال $\frac{1}{n}$ دارند.

❍حوادث مستقل:

هرگاه وقوع یا عدم وقوع یک حادثه تأثیری در وقوع یا عدم وقوع حادثه دیگر نداشته باشد دو حادثه را مستقل گویند وخواهیم داشت:

$$\boxed{A,B \text{ مستقل} \quad \Leftrightarrow \quad P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

توجه کنید که درمقابل حوادث مستقل، حوادث وابسته مطرح می‌شوند.

سه پیشامد A و B و C مفروض هستند:

$$\boxed{(1).\begin{cases} P(A\cap B)=P(A).P(B) \\ P(A\cap C)=P(A).P(C) \\ P(B\cap C)=P(B).P(C) \end{cases} \quad , \quad (2).P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)}$$

هرگاه رابطهٔ (1) و (2) همزمان برقرار باشند، سه پیشامد A و B و C مستقل می‌باشند.

هرگاه فقط رابطهٔ (1) برقرار باشد سه پیشامد A و B و C دوبه دو مستقل می‌باشند.

مثال۱: شرط استقلال سه واقعه A و B و C تعریف شده در یک فضای نمونه از یکدیگر چیست؟ (اقتصاد ۷۹)

۱) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

۲) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
$P(A\cap C)=P(A).P(C)$
$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۳) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$
$P(A\cap B)=P(A).P(B)$
$P(A\cap C)=P(A).P(C)$
$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۴) یکی از دوشرط ۱ یا ۲ جاری باشد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : بنابرنکته گفته شده، گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال۲: اگر $P(A)=0.3$ و $P(B)=0.2$ و $P(A\cap B)=0.06$، رویدادهای (حوادث) A و B چگونه‌اند؟ (مدیریت ۷۸)

۱) مکمل ۲) مستقل ۳) ناسازگار ۴) وابسته

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$P(A\cap B)=P(A).P(B) \Rightarrow 0.06=0.3\times 0.2 \rightarrow$ A و B مستقل‌اند

توجه کنید در احتمال « **و** » را با $\cap$ و «**یا**» را با $\cup$ نمایش می‌دهند.

مثال۳: در پرتاب یک تاس و یک سکه احتمال ظاهر شدن 2 و شیر چه خواهد بود؟

حل :

A = پیشامد 2 آمدن تاس

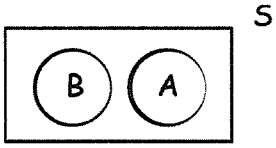
B = پیشامد شیرآمدن سکه

$\xrightarrow{\text{A و B مستقل}}$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

○ حوادث ناسازگار

هرگاه وقوع همزمان دو حادثه **غیرممکن** باشد، حوادث را ناسازگار گوئیم و در نتیجه:

A , B ناسازگار $\Leftrightarrow \begin{cases} A\cap B=\phi \\ P(A\cap B)=0 \end{cases}$



نکته : در دو حادثه مستقل A و B هرگاه احتمال وقوع یکی از حوادث **صفر** شود آن‌گاه دو حادثه ناسازگارند.

A , B مستقل $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \xrightarrow[\text{یا } P(B)=0]{P(A)=0} P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow$ A , B ناسازگار

مثال ۱: $P(A) = 0.1$ و $P(B) = 0.2$ و $P(A \cap B) = 0$ و A و B نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) مستقل ۲) ناسازگارند ۳) وابسته‌اند ۴) هیچ‌کدام

حل : چون $P(A \cap B) = 0 \Leftarrow$ A , B ناسازگارند.

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲: در پرتاب یک سکه و یک تاس (دو حادثه مستقل) احتمال ظاهرشدن 7 و شیر کدام است؟

حل :

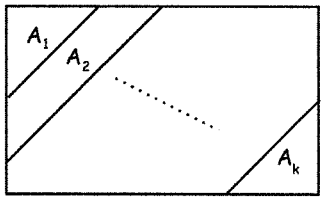
A پیشامد = ظاهر شدن شیر $\longrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

B پیشامد = ظاهر شدن 7 $\longrightarrow P(B) = 0$

○گروه کامل حوادث (افراز فضای نمونه‌ای)

پیشامدهای A_1 و ... و A_n را یک افراز فضای نمونه‌ای می‌گوییم، هرگاه:



$$\boxed{\begin{array}{ll} A_i \cap A_j = \phi & i \neq j \\ S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n & \Rightarrow \quad P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = 1 \end{array}}$$

• نکات مهم احتمال:

۱ـ $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$

۲ـ جمع کل احتمالات همواره برابر **یک** می‌باشد؛ $\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$

۳ـ اگر احتمال وقوع حادثه B ، k برابر احتمال وقوع حادثه A باشد و این دو حادثه کل را بپوشانند $(P(A) + P(B) = 1)$ ، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{k+1} \qquad P(B) = \frac{k}{k+1}$$

اگر $P(e_1) = 2p(e_2)$ و $p(e_3) = p(e_4) = \frac{1}{4}$ باشد $p(e_1)$ و $p(e_2)$ را پیدا کنید؟

حل :

$$P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4) = 1$$

$$2P(e_2) + P(e_2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 3P(e_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(e_2) = \frac{1}{6}, P(e_1) = \frac{1}{3}$$

۴ـ اگر A و B دو حادثه باشند؛

احتمال اجتماع دو حادثه A و B به صورت $P(A\cup B)$ می‌تواند یکی از مفاهیم زیر را داشته باشد.

- وقوع حداقل یکی از دو حادثه A و B
- وقوع A یا B
- حادثه متأثر از A و B اتفاق بیافتد.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- A و B مستقل: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$
- A و B ناسازگار: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- احتمال شرطی:
$$\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B|A).P(A) \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A|B).P(B) \end{cases}$$

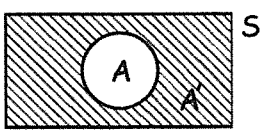
اگر A و B و C ، سه حادثه باشند:

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

و به طور کلی: اگر A_1 ، A_2 ، ... ، A_n حادثه دلخواه باشند:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots(-1)^{n+1}P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_n)}$$

۵ـ اگر A پیشامد وقوع یک حادثه باشد، آن‌گاه **مکمل** A که با $(\bar{A}\ ,\ A^C\ ,\ A')$ نشان داده می‌شود، عدم وقوع حادثه را نشان می‌دهد. بنابراین روابط زیر برقرار است؛



$P(A\cap A')=0 \Rightarrow$ دو پیشامد A و A' ناسازگارند.

$P(A)+P(A')=1 \Rightarrow$ دو پیشامد A و A' یک گروه کامل حوادث هستند؛
- $P(A)=1-P(A')$
- $P(A')=1-P(A)$

$$P(A\cup A')=\underbrace{P(A)+P(A')}_{1}-\underbrace{P(A\cap A')}_{0}=1$$

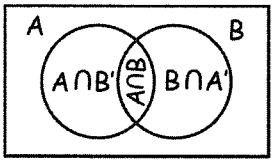
۶ـ روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{cases} (A\cup B)'=(A'\cap B') \\ (A'\cup B')'=(A\cap B) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (A\cap B)'=(A'\cup B') \\ (A'\cap B')'=(A\cup B) \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۷ـ اگر A و B دو حادثه باشند چون $(A\cap B')$ و $(A\cap B)$ ناسازگارند روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B')$$
$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A')$$
$$P(A') = P(A'\cap B) + P(A'\cap B')$$
$$P(B') = P(B'\cap A) + P(B'\cap A')$$



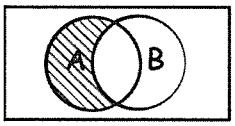
وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۸ـ اگر از بین جفت‌های (A , B) ، (A , B')، (A' , B')، (A' , B)، یک جفت مستقل باشند آن‌گاه بقیه نیز مستقل‌اند.

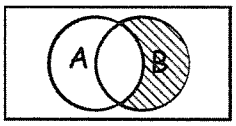
۹ـ احتمال تفاضل دو پیشامد عبارتست از:

احتمال وقوع فقط A	$P(A-B) = P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$ ؛
احتمال وقوع فقط B	$P(B-A) = P(B\cap A') = P(B) - P(A\cap B)$ ؛
احتمال وقوع فقط یک حادثه بین A و B یا تفاضل متقارن	$P(A\Delta B) = P(A-B)+P(B-A) = P(A\cap B')+P(B\cap A')$ ؛

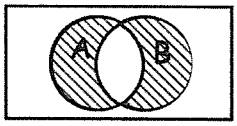
به شکل‌های زیر توجه کنید:



(A-B)



(B-A)



(A△B)=(A-B)+(B-A)

۱۰ـ اگر A و B دو حادثه باشند داریم:

$$\text{اگر } A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$$

۱۱ـ هرگاه حوادث A_i از هم مستقل باشند برای محاسبه $P(A_1\cup A_2 ....\cup A_k)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(A_1\cup A_2 ....\cup A_k) = 1 - P(A_1\cup A_2 ....\cup A_k)' = 1 - P(A'_1\cap A'_2 ....\cap A'_k) = 1 - P(A'_1)P(A'_2)...P(A'_k)$$

مثال ۱: احتمال این‌که یک مسأله ریاضی را حسن حل کند، 0.4 و احتمال این که حسین حل کند، 0.5 است. احتمال این که مسأله حل شود برابر است با: (اقتصاد ۸۱)

۱) 0.2 ۲) 0.7 ۳) 0.8 ۴) 0.9

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابرنکتهٔ ۴:

A: پیشامد آن که حسن مسأله را حل کند
B: پیشامد آن که حسین مسأله را حل کند
→ A و B مستقل‌اند

احتمال این‌که مسأله حل شود برابر است با: احتمال این که حسن مسأله را حل کند **یا** حسین مسأله را حل کند.

روش اول: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + 0.5 - (0.4\times 0.5) = 0.7$

روش دوم: $P(A\cup B) = 1 - P(A\cup B)' = 1 - P(A'\cap B') = 1 - P(A')\times P(B') = 1 - 0.6\times 0.5 = 0.7$

مثال۲: یک شرکت حفاری نفت فقط امکانات لازم برای حفر دو چاه را دارد. اگر در حفر اولین چاه به نفت برسد کار را تمام می‌کند و گرنه چاه دوم را حفر می‌کند. اگر احتمال این که در حفر هر چاه به نتیجه برسد، 0.2 باشد، احتمال این‌که شرکت حفاری به نتیجه برسد کدام است؟(حفاری چاه‌ها به طور مستقل از هم صورت می‌گیرد). (اقتصاد ۸۱)

۱) 0.2 ۲) 0.8 ۳) 0.16 ۴) 0.36

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

(A_1) چاه اول = به نتیجه رسیدن حفر چاه $\cup$ (A_2) چاه دوم

$$P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1 \cup A_2)' = 1 - P(A_1' \cap A_2') = 1 - P(A_1') \times P(A_2') = 1 - 0.8 \times 0.8 = 0.36$$

مثال۳: اگر $A_1 , A_2 , \cdots , A_n$ رویدادهای با $A_i \cap A_j = \phi$ باشند، در این صورت: (اقتصاد ۷۴)

۱) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

۲) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

۳) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(A_i)$

۴) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) > \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابر نکتهٔ ۴ ، چون $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ ناسازگارند بنابراین:

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

مثال۴: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.2$ و A و B مستقل باشند، $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ برابر است با: (مدیریت ۸۱)

۱) 0.44 ۲) 0.50 ۳) 0.56 ۴) 0.667

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

بنابر نکتهٔ ۷ داریم:

$$(A , B) \text{ مستقل} \Rightarrow (\bar{A} , \bar{B}) \text{ مستقل} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \times (1 - P(B))$$
$$= (1 - 0.3)(1 - 0.2) = (0.7)(0.8) = 0.56$$

مثال۵: احتمال به صدا درآمدن هر یک از سه آژیر خطر مستقلی که در یک فروشگاه نصب شده‌اند به هنگام آتش‌سوزی برابر 0.95 است. احتمال آن که به هنگام بروز آتش‌سوزی حداقل یکی از سه آژیر خطر به صدا درآید، چقدر است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 0.15 ۲) $(0.95)^3$ ۳) $1 - (0.05)^3$ ۴) $1 - (0.95)^3$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

پیشامد آن که حداقل یکی از سه آژیر خطر به صدا در آید: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

پیشامد آن که هیچ‌یک از سه آژیر خطر به صدا در نیاید : $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)' = 1 - P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = 1 - P(A'_1)P(A'_2)P(A'_3) = 1 - (0.05)^3$$

مثال۶: سه نفر A و B و C به ترتیب با احتمال 0.4 و 0.7 و 0.5 یک مسأله را حل می‌کنند. مطلوب است:

a) احتمال آن‌که فقط یکی مسأله را حل کند.

b) احتمال آن که مسأله حل شود.

حل a) :

P = P (A حل کند و B حل نکند و C حل نکند) + P (A حل نکند و B حل‌کند و C حل نکند) + P (A حل نکند و B حل نکند و C حل کند)

$$P = AB'C' + A'BC' + A'B'C = (0.4 \times 0.3 \times 0.5) + (0.6 \times 0.7 \times 0.5) + (0.6 \times 0.3 \times 0.5) = 0.36$$

حل b) :

حل شدن مسأله بدین معنا است که حداقل یکی مسأله را حل کند، بنابراین از مکمل آن استفاده می‌کنیم.

$$P = 1 - A'B'C' = 1 - (1 - 0.5)(1 - 0.7)(1 - 0.4) = 1 - (0.5)(0.3)(0.6) = 0.91$$

مثال۷: فرض کنید احتمال آن که در بیست سال آینده زن و شوهری زنده بمانند به ترتیب 0.7 و 0.4 باشد، مطلوبست محاسبه احتمال:

a) هردو زنده بمانند.

b) هیچکدام زنده نمانند.

c) احتمال آن‌که حداقل یکی زنده بماند (در بیست سال آینده شخصی زنده بماند)

d) فقط یکی زنده بماند.

e) فقط زن زنده بماند.

f) زن زنده بماند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل :

a)

A: پیشامد زنده ماندن شوهر 0.4

B: پیشامد زنده ماندن زن 0.7

دو پیشامد مستقل‌اند

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = 0.4\times 0.7 = 0.28$

b) $P(A'\cap B') = P(A')\times P(B') = 0.6\times 0.3 = 0.18$

c)

راه حل اول: $P(A\cup B) = 1 - P(A'\cap B') = 1 -$ (هیچکدام زنده نمانند) $= 1 - 0.18 = 0.82$

راه حل دوم: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.4 + 0.7 - (0.4)(0.7) = 0.82$

d) $P(A'\cap B) + P(A\cap B') = P(A').P(B) + P(A).P(B') = (0.6)(0.7) + (0.4)(0.3) = 0.54$

e) $P(A'\cap B) = P(A').P(B) = (0.6)(0.7) = 0.42$

f) $P(B) = 0.7$

در آزمایش حادثه A باعث وقوع حادثه B می‌گردد. کدام‌یک از عبارات زیر درباره احتمال‌های این حوادث صحیح است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) $P(A)>P(B)$ ۲) $P(A)\le P(B)$ ۳) $P(A)\ne P(B)$ ۴) $P(A)\ge P(B)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابرنکته ۱۰، چون حادثه A باعث وقوع حادثه B شده است پس: $A\subset B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

○مسائل مهم احتمال

مهمترین مسائل مربوط به احتمال عبارتند از:

پرتاب تاس

پرتاب سکه

پرتاب تاس وسکه

مسئله مهره‌ها

سیستم سری و موازی

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ پرتاب تاس

توجه کنید که در پرتاب m تاس فضای نمونه 6^m می‌باشد.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 چقدر است؟ حل : حالات مساعد: $\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$ توجه کنید که زوج (3 , 3) یک بار باید نوشته شود.
b)	در پرتاب دوتاس احتمال ظاهر شدن مجموع 6 و تاس اول کمتر از 3 چقدر است؟ حل : حالات مساعد: $\{(1,5),(2,4)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{2}{36}$
C)	در پرتاب دوتاس احتمال آن‌که مجموع کمتر از 5 باشد و یکی از تاس‌ها کمتر از 2 باشد چقدر است؟ حل : حالات مساعد: $\{(1,3),(1,2),(1,1),(2,1),(3,1)\}$ حالات کل: 6^2 $\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$
D)	در پرتاب سه تاس احتمال آن‌که نتایج متفاوت باشد؟ حل : $\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{20}{36}$
e)	در پرتاب سه تاس احتمال آن‌که تاس اول و سوم یکسان و با تاس دوم متفاوت باشد؟ حل : $\frac{6}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$
f)	در پرتاب چهارتاس احتمال آن‌که تاس اول عدد4 باشد چقدر است؟ حل : $\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{6}$
g)	در پرتاب 4 تاس احتمال آن‌که تاس اول عدد 4 باشد و تاس دوم و چهارم برابر باشد؟ حل : $\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{6}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

h) در پرتاب چهار تاس احتمال آن‌که تاس اول و سوم یکسان و تاس دوم و چهارم یکسان باشند و با هم متفاوت باشند؟

حل : $\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

i) در پرتاب پنج تاس چقدر احتمال دارد:

ـ همه شماره‌ها فرد باشند:

حل : $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

ـ شماره‌های اول وسوم و پنجم یکسان باشند:

حل : $\underset{\text{اول}}{\underset{\downarrow}{\frac{6}{6}}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\text{سوم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\text{پنجم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{36}$

ـ فقط شماره‌های اول و سوم و پنجم یکسان باشند:

حل :

$\underset{\text{اول}}{\underset{\downarrow}{\frac{6}{6}}} \times \frac{5}{6} \times \underset{\text{سوم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} \times \frac{4}{6} \times \underset{\text{پنجم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} = \frac{20}{6^4}$

ـ فقط سه شماره یکسان باشند:

حل : چون در سؤال مشخص نشده کدام شماره‌ها یکسان باشند، ابتدا باید ترکیب‌های مختلف سه تاس از پنج تاس را انتخاب کنیم.

$\binom{5}{3} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{200}{6^4}$

ـ همه شماره‌ها متفاوت باشند:

حل :

$\frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{120}{6^4}$

نکته : در پرتاب چندتاس اگر بخواهیم نتایج یکسان در مراحل مختلف داشته باشیم کافی است مرحله اول را محاسبه کرده و به جای مراحل دیگر یکسان 1 می‌گذاریم.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

پرتاب سکه

در پرتاب n سکه، فضای نمونه 2^n است.

ردیف	سؤال و حل
a)	در پرتاب 2 سکه احتمال ظاهرشدن نتایج یکسان چقدر است؟ **حل :** { (خ و خ) ، (ش و ش)} : حالات مساعد 2^2: حالت کل $\Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{4}$
b)	در پرتاب 3 سکه احتمال ظاهرشدن حداقل یک خط کدام است؟ **حل :** 2^3 : حالت کل P (حداقل یک خط) $= 1 - P$ (همه شیر) $= 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
c)	در پرتاب چهار سکه احتمال آن‌که سکه اول خط ظاهر شود؟ **حل :** P (سکه اول خط) $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$
d)	در پرتاب دو سکه احتمال آن‌که نتایج متفاوت باشد، چقدر است؟ **حل :** { (ش و خ) ، (خ و ش) } : حالات مساعد 2^2: حالات کل $\Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{4}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○پرتاب تاس و سکه

توجه کنید که تاس و سکه مستقل از هم بررسی می‌شوند.

ردیف	سؤال وحل
a)	در پرتاب یک تاس و یک سکه، احتمال آن‌که تاس 5 و سکه خط ظاهر شود؟ **حل :** $P(\text{سکه خط و تاس } 5) = P(\text{تاس } 5) \times P(\text{سکه خط}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$
b)	در پرتاب سه تاس و یک سکه احتمال آن‌که خط و تاس اول و سوم یکسان ظاهر شوند؟ **حل :** $\frac{1}{2} \times \underset{\text{اول}}{\underset{\downarrow}{\frac{6}{6}}} \times \frac{6}{6} \times \underset{\text{سوم}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{12}$

○مسئله مهره‌ها

ردیف	سؤال و حل
a)	کیسه‌ای دارای 10 مهره از شماره 1 تا 10 است مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. ـ احتمال آن‌که مهره 4 باشد؟ **حل :** حالات مساعد: $\{4\}$ حالات کل: $\{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره یک عدد بین 1 تا 10 باشد؟ **حل :** $P(A) = \frac{10}{10} = 1$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج باشد؟ **حل :** حالات مساعد: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ حالات کل: $\{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10}$ ـ احتمال آن‌که مهره زوج و کمتر از 6 باشد؟ **حل :** حالات مساعد: $\{2, 4\}$ حالات کل: $\{1, 2, \dots, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{10}$

b) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز است و 5 مهره آبی است، مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که قرمز باشد؟

حل :

$$P(A) = \frac{\text{تعداد مهره قرمز}}{\text{تعداد کل مهره‌ها}} = \frac{4}{9}$$

c) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و 5 مهره آبی است، 2 مهره آبی از آن خارج می‌کنیم، سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره قرمز باشد؟

حل :

قرمز	آبی
4	5

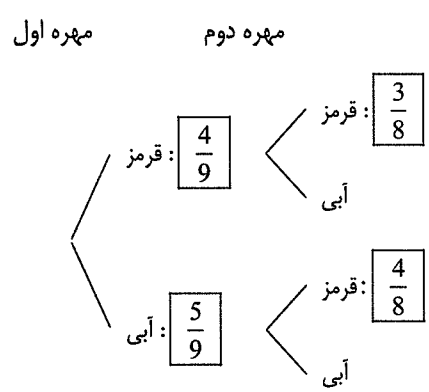
$\xrightarrow{\text{2 مهره آبی خارج}}$

قرمز	آبی
4	3

$$P(\text{مهره قرمز}) = \frac{4}{7}$$

d) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز و5 مهره آبی است، یک مهره را از آن خارج می‌کنیم سپس مهره‌ای دیگر از آن خارج می‌کنیم احتمال آن‌که مهره آخر خارج شده قرمز باشد؟

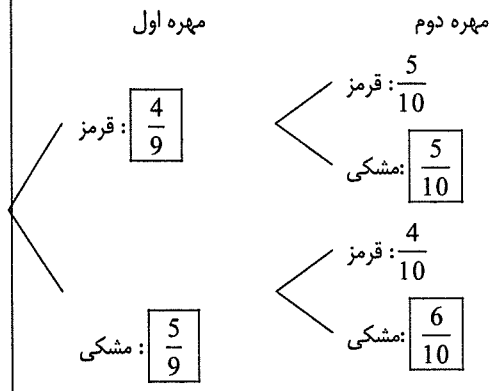
حل :



$$P(\text{قرمز}) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}$$

e) کیسه‌ای شامل 4 مهره قرمز، 5 مهره مشکی است، یک مهره از آن خارج کرده و به همراه یک مهره همرنگ آن دوباره داخل ظرف می‌گذاریم سپس مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره مشکی باشد؟

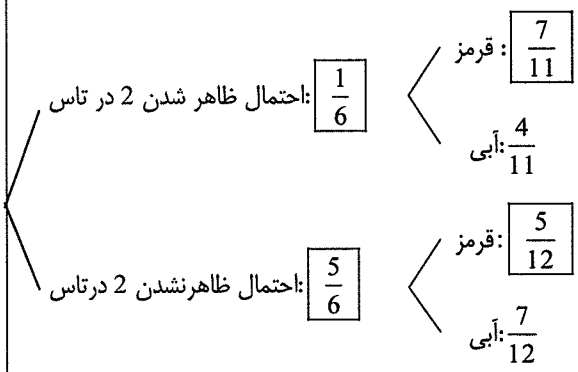
حل :



$$P(\text{مشکی}) = \frac{4}{9}\times\frac{5}{10}+\frac{5}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}$$

f) کیسه‌ای شامل 5 مهره قرمز و 4 مهره آبی است، تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر 2 آمد، 2 مهره قرمز در غیر این صورت 3 مهره آبی به کیسه اضافه می‌کنیم، سپس مهره‌ای از ظرف خارج می‌کنیم احتمال آن‌که این مهره قرمز باشد؟

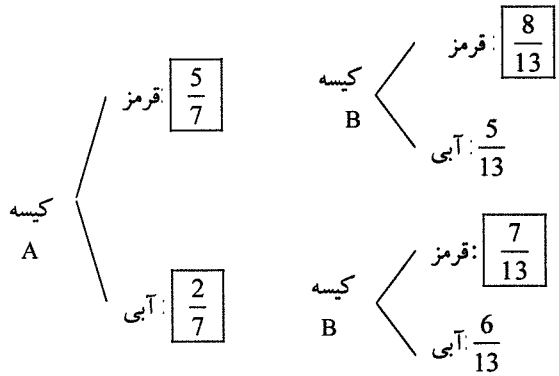
حل :



$$P(\text{قرمز}) = \frac{1}{6}\times\frac{7}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{12}$$

g) کیسه A شامل 5 مهره قرمز و 2 مهره آبی وکیسه B شامل 7 مهره قرمز و 5 مهره آبی است مهره‌ای از کیسه A خارج کرده‌ایم و به کیسهB ریخته‌ایم، سپس مهره‌ای از کیسه B خارج کنیم، مطلوبست احتمال این‌که این مهره قرمز باشد:

حل :



$$P(\text{قرمز}) = \frac{5}{7}\times\frac{8}{13}+\frac{2}{7}\times\frac{7}{13}=\frac{54}{91}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ انتخاب با جایگذاری و بدون جایگذاری

ردیف	سؤال وحل
a)	در جعبه‌ای 3 مهره قرمز، 2 مهره سبز و 5 مهره سفید وجود دارد. اگر 3 مهره به تصادف انتخاب کنیم، مطلوب است: (انتخاب پیش فرض بدون جایگذاری است) احتمال آن‌که هر سه قرمز باشند؟ **حل :** $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که هر سه همرنگ باشد؟ **حل :** $\frac{\binom{3}{3}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که مهره‌ها همرنگ نباشند؟ **حل :** $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$
	احتمال آن‌که حداقل یک مهره قرمز باشد؟ **حل :** P (حداقل یک قرمز) = 1 − P (قرمز نداشته باشیم) $= 1 - \frac{\binom{5+2}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}$

b) در جعبه‌ای 3 مهره قرمز، 2 مهره سبز و 5 مهره سفید وجود دارد. اگر 3 مهره به تصادف با جای‌گذاری انتخاب کنیم، مطلوبست: (دقت می‌کنید در مسائل با جایگذاری ترتیب مهم بوده و مسئله را مرحله به مرحله حل می‌کنیم.)

احتمال آن‌که هر سه قرمز باشد؟

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل :

ق ق ق

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}$$

احتمال آن‌که هر سه همرنگ باشند؟

حل :

$$\underbrace{\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10}}_{\text{هر سه قرمز}} + \underbrace{\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10}}_{\text{هر سه سبز}} + \underbrace{\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10}}_{\text{هر سه سفید}}$$

در انتخاب با جایگذاری می‌توان از هر رنگ هر تعداد مهره خارج کرد.

احتمال آن‌که مهره‌ها همرنگ نباشند؟

حل : انتخاب‌های مجاز (سفید، سبز، قرمز)، (سبز، سفید، قرمز)، ...

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} + \dots = 3!\left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{10}\right)$$

احتمال آن‌که دو مهره قرمز باشد؟

حل : انتخاب‌های مجاز (سفید یا سبز، قرمز، قرمز)، (قرمز، سفید یا سبز، قرمز)، ...

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} + \dots = \frac{3!}{2!}\left(\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10}\right)$$

احتمال آن‌که حداقل یک مهره قرمز باشد؟

حل :

P (حداقل یک قرمز) = 1 − P (قرمز نداشته باشیم)

$$= 1 - \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^3$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ سیستم موازی و سری:

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱: سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کارنکردن هر یک از آن‌ها 0.30 است.

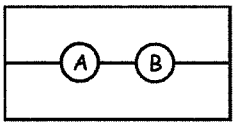
a) اگر اجزاء به صورت سری قرار گرفته باشند و مستقل از هم کار کنند احتمال کارکردن سیستم چقدر است؟

b) اگر اجزاء به صورت موازی قرار گرفته باشند و مستقل از هم کار کنند احتمال کارکردن سیستم چقدر است؟

حل :

a) در حالت سری، باید هم جزء A و هم جزء B با هم کارکنند تا سیستم کار کند. یعنی باید حالت اشتراک را در نظر بگیریم.

$$P\ (\text{کارکردن}) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$$

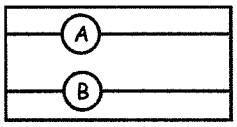


∩(سری)

b) در حالت موازی، اگر جزء A کارکند یا جزء B کار کند، سیستم کار خواهد کرد، یعنی باید حالت اجتماع را در نظر بگیریم.

$$P\ (\text{کارکردن}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P\ (\text{کارکردن}) = 0.7 + 0.7 - (0.7 \times 0.7) = 0.91$$



∪(موازی)

مثال ۲: سیستمی دارای دو جزء است که احتمال کار کردن هر یک از آن‌ها 0.90 است. اگر اجزاء به صورت موازی قرار گرفته باشند و مستقل از همدیگر کار کنند، احتمال کارکردن سیستم چقدر است؟ (حسابداری ۸۲)

۱) 0.10 ۲) 0.81 ۳) 0.90 ۴) 0.99

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در حالت موازی از رابطهٔ اجتماع استفاده می‌کنیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.90 + 0.90 - (0.90 \times 0.90) = 0.99$$

احتمال شرطی

هنگامی که دو پیشامد به یکدیگر وابسته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری تأثیری می‌گذارد، در این صورت وقوع یکی را پس از این که دیگری به وقوع پیوسته باشد، محاسبه می‌نمایند چنین احتمالی را احتمال شرطی می‌گویند.

وقوع حادثه A ، به شرط آن‌که بدانیم B رخ داده است را به صورت $P(A|B)$ نشان داده و از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{\text{احتمال } A \text{ به شرط } B \text{ ؛ } P(B) \neq 0 \text{ ؛ } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

همچنین می‌توان احتمال وقوع حادثه B را به شرط وقوع حادثه A به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{\text{احتمال } B \text{ به شرط } A \text{ ؛ } P(A) \neq 0 \text{ ؛ } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

به شکل زیر توجه کنید:

نکته : در صورتی که حوادث A و B **ناسازگار، وابسته**، یا **مستقل** باشند به نتایج زیر می‌رسیم:

$$P(A|B) = \begin{cases} = 0 & \text{ناسازگار؛ } A \text{ , } B \\ = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{وابسته؛ } A \text{ , } B \\ P(A) & \text{مستقل؛ } A \text{ , } B \end{cases}$$

$$P(B|A) = \begin{cases} = 0 & \text{ناسازگار؛ } A \text{ , } B \\ = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} & \text{وابسته ؛ } A \text{ , } B \\ = P(B) & \text{مستقل؛ } A \text{ , } B \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته : مکمل احتمال وقوع حادثه A به شرط وقوع حادثه B عبارتست از:

$$\boxed{P(A'|B) = 1 - P(A|B)}$$

مثال ۱: یک تاس را پرتاب می‌کنیم، احتمال آن را حساب کنید که عدد 6 رخ دهدبه شرط آن که می‌دانیم عدد بزرگتر از 4 رخ داده است.

حل :

فضای نمونه: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

پیشامد A: $A = \{6\} \longrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

پیشامد B: $B = \{5, 6\} \longrightarrow P(B) = \frac{2}{6}$

$A \cap B = \{6\} \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۲: اگر $P(A) = 0.30$ و $P(B) = 0.50$ و $P(A \mid B) = 0.30$ باشد. می‌توان گفت A و B هر دو: (حسابداری ۸۱)

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = P(A) \Leftarrow$ A , B مستقل هستند.

مثال ۳: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \mid B) = 0$ باشند. می‌توان گفت A و B هردو :

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) شرطی‌اند.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) = 0 \Leftarrow P(A \cap B) = 0 \Leftarrow$ A , B ناسازگار هستند.

مثال ۴: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \mid B) = 0.1$ باشد می‌توان گفت A و B هر دو:

۱) مستقل ۲) ناسازگار ۳) وابسته ۴) مکمل

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

چون $P(A|B) \neq P(A)$ پس A و B مستقل نمی‌باشند و هم‌چنین $P(A|B) \neq 0$ پس A و B ناسازگار نیز نمی‌باشند. بنابراین A و B دو حادثه وابسته می‌باشند.

مثال ۵: اگر $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$ و $P(B \mid A) = 0.1$ باشد آن‌گاه $P(A \mid B)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) 0.0153 ۲) 0.04 ۳) 0.05 ۴) 0.067

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.04}{0.6}=0.067$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\times 0.4=0.04$$

مثال۶: اگر $P(A)=0.5$ و $P(B)=0.4$ و $P(A\mid B)=0.1$ باشد آن‌گاه $P(A\cup B)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) 0.75 ۲) 0.86 ۳) 0.8 ۴) 0.9

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ $P(A\cup B)$ به $P(A\cap B)$ نیاز است، بنابراین:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.4-0.04=0.86$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\times 0.4=0.04$$

مثال۷: اگر $P(A)=\frac{1}{5}$ و $P(B)=\frac{1}{2}$ و $P(A|B)=\frac{1}{4}$ باشد، $P(A'\cup B')$ کدام است؟ (مدیریت ۷۳)

۱) $\frac{19}{20}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{21}{20}$ ۴) $\frac{3}{8}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ $P(A'\cup B')$ ابتدا نیاز به محاسبهٔ $P(A\cap B)$ می‌باشد بنابراین:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

مثال۸: اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A')=\frac{1}{4}$ مقدار $P(B)$ کدام است؟(اقتصاد ۷۹)

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}\times P(B) \qquad (I)$$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')} \Rightarrow P(A'\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \qquad (II)$$

می‌دانیم: $P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)\xrightarrow{I\,,\,II}P(B)=\frac{1}{3}P(B)+\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{3}{16}}$

مثال۹: با فرض آن‌که احتمال آمدن برف در امروز 0.2 و فردا 0.22 باشد. احتمال برف آمدن فردا به شرط آن که امروز برف بیاید، 0.7 است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آن‌که امروز برف نیاید، چقدر است؟(اقتصاد ۷۹)

۱) 0.3 ۲) 0.72 ۳) 0.78 ۴) 0.9

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{برف آمدن امروز : پیشامد } A \longrightarrow P(A) = 0.2 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\text{برف آمدن فردا : پیشامد } B \longrightarrow P(B) = 0.22$$

$$P(B|A) = 0.7 \longrightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = 0.7 \times 0.2 = 0.14$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [0.2 + 0.22 - 0.14] = 0.72$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{0.72}{0.8} = 0.9$$

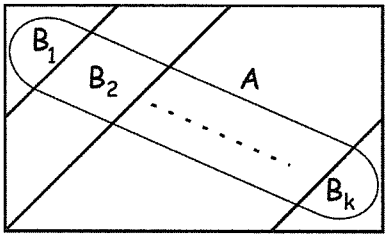
احتمال متوسط

هرگاه حادثه A در نتیجه وقوع هر یک از حوادث B_1، B_2، ....B_k بتواند اتفاق بیفتد آن‌گاه وقوع حادثه A به طور متوسط به شرح زیر بررسی می‌شود.

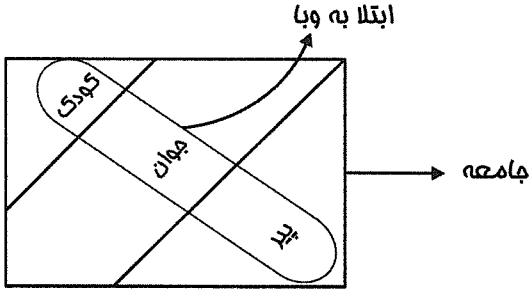
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + (A \cap B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)$$

به شکل زیر توجه کنید:



افراد یک جامعه به کودک، جوان و پیر تقسیم می‌شوند، فرض کنید که بیماری وبا در این جامعه شایع شده باشد، اگر بخواهیم احتمال مبتلایان به میکروب وبا را محاسبه کنیم چون این بیماری در کل جامعه پخش شده است، خواهیم داشت:

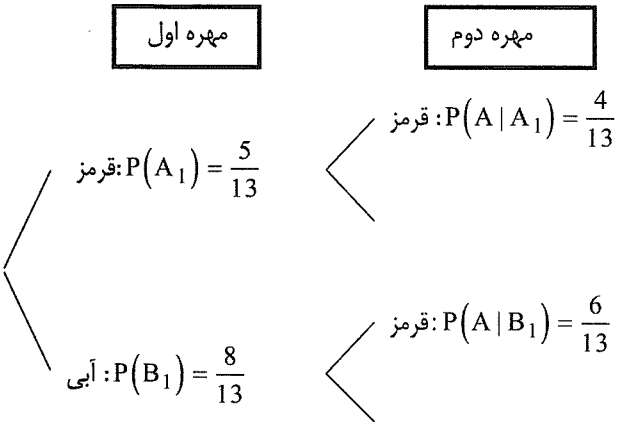


P (ابتلا به وبا) = P (ابتلا به وبا و کودک) + P (ابتلا به وبا و جوان) + P (ابتلا به وبا و پیر)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: ظرفی حاوی 5 مهره قرمز و 8 مهره آبی است. به طور تصادفی مهره‌ای از ظرف بیرون می‌آوریم و به جای آن مهره‌ای به رنگ دیگر داخل ظرف می‌اندازیم و سپس مهره دوم را از ظرف بیرون می‌آوریم، احتمال آن‌که مهره دوم قرمز باشد؟

حل : بهتر است که از نمودار درختی استفاده نمائیم:



$\Rightarrow$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

P (مهر دوم قرمز) = P (اولی قرمز و دومی قرمز) + P (اولی آبی و دومی قرمز)

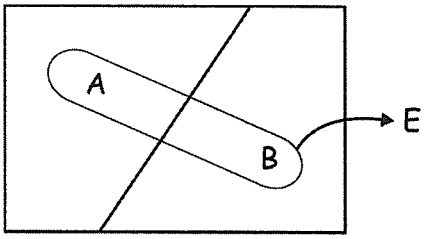
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(B_1)P(A|B_1)$$

$$P(A) = \frac{5}{13} \times \frac{4}{13} + \frac{8}{13} \times \frac{6}{13} = \frac{68}{169}$$

مثال ۲: اگر $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.4$ و $P(E|A) = P(E|B) = 0.1$ مطلوبست محاسبه $P(E)$؟ (مدیریت ۷۸)

۱) 0.2 ۲) 0.1 ۳) 0.06 ۴) 0.7

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



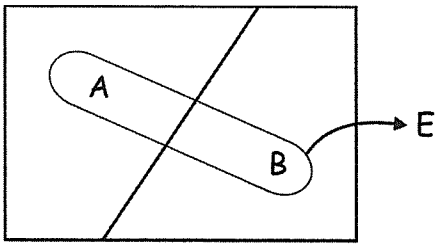
$$P(E) = \overbrace{P(A) \times P(E|A)}^{P(A\cap E)} + \overbrace{P(B) \times P(E|B)}^{P(B\cap E)}$$

$$P(E) = 0.2 \times 0.1 + 0.4 \times 0.1 = 0.02 + 0.04 = 0.06$$

مثال ۳: اگر $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.4$ و $P(E|A) = 0.1$ و $P(E^c|B) = 0.8$ مطلوبست $P(E)$؟ (مدیریت ۸۰)

۱) 0.11 ۲) 0.18 ۳) 0.3 ۴) 0.35

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



$$P(E) = \overbrace{P(A) \times P(E|A)}^{P(A\cap E)} + \overbrace{P(B) \times P(E|B)}^{P(A\cap B)}$$

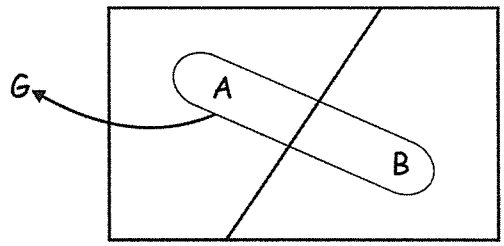
$$P(E|B) = 1 - P(E^c|B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(E) = 0.3 \times 0.1 + 0.4 \times 0.2 = 0.03 + 0.08 = 0.11$$

مثال۴: اگر $P(A) = P(B) = 0.4$ و $P(G \mid B) = P(G \mid A) = 0.1$ مقدار $P(G)$ چقدر است؟ (حسابداری ۷۸)

۱) 0.08 ۲) 0.21 ۳) 0.51 ۴) 0.9

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



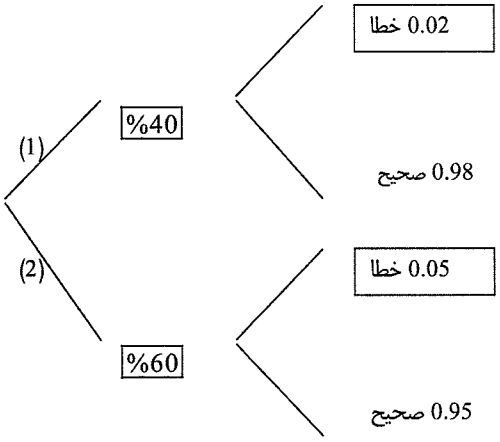
$$P(G) = \overbrace{P(A) \times P(G|A)}^{P(G\cap A)} + \overbrace{P(B) \times P(G|B)}^{P(G\cap B)}$$

$$P(G) = 0.4 \times 0.1 + 0.4 \times 0.1 = 0.04 + 0.04 = 0.08$$

مثال۵: دو تلفنچی شماره 1 و شماره 2 به ترتیب 40% و 60% تلفن‌های شرکت را وصل می‌کنند، تلفنچی شماره 1 در 0.02 موارد تلفنچی شماره 2 در 0.05 موارد دچار خطا می‌شوند چند درصد تلفن‌های شرکت اشتباهاً وصل شده‌اند؟ (مدیریت ۷۶)

۱) %2.7 ۲) %3.8 ۳) %7 ۴) %1.07

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.



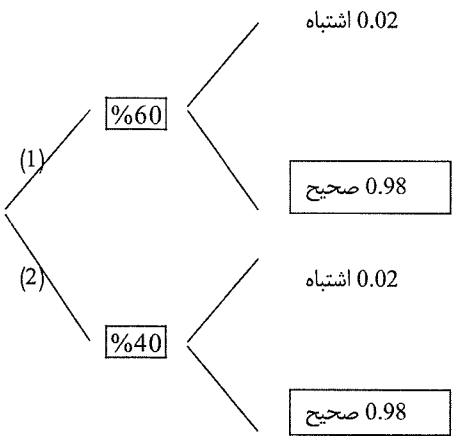
$$\Rightarrow P(\text{خطا}) = 0.4\times0.02+0.6\times0.05=0.038=\%3.8$$

مثال۶: حسابدار رتبه یک، 0.60 حساب‌های یک شرکت را ثبت می‌کند و حسابدار رتبه دو، 0.40 حساب‌های یک شرکت را ثبت می‌کند. هر یک از آن‌ها در 0.02 موارد در ثبت حساب‌های خود دچار اشتباه می‌شوند. احتمال آن‌که حساب‌های ماه گذشته شرکت درست ثبت شده باشند، چقدر است؟ (مدیریت ۷۲)

۱) 0.98 ۲) 0.80 ۳) 0.66 ۴) 0.96

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.



$$\Rightarrow P\,(\text{صحیح}) = 0.60\times0.98+0.40\times0.98=0.98$$

○ قضیه بیز

اگر $A_1 , A_2 , \dots , A_k$ **گروه کامل حوادث** بوده و E حادثه‌ای باشد که روی حوادث فوق اتفاق بیافتد آن‌گاه احتمال شرطی وقوع A_k به شرط آن که بدانیم حادثه E اتفاق افتاده است، تحت عنوان قضیه بیز مطرح می‌شود.

اگر فضای نمونه‌ای توسط پیشامدهای $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ افراز شود یعنی:

$$\left|\begin{array}{ll} A_i \cap A_j = \phi & i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} = S & \\ A_i \neq \phi & \end{array}\right.$$

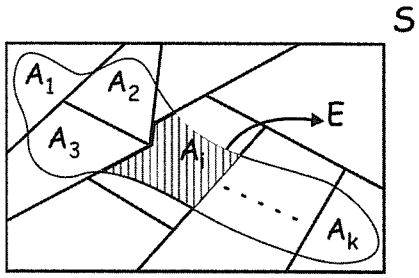
و E یک پیشامد در این فضا باشد، خواهیم داشت:

$$\boxed{P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E|A_k)}{P(E)} \qquad ; k = 1 , 2 , \dots , n}$$

توجه کنید که P(E)، احتمال متوسط است.

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(E|A_k)$$

به شکل زیر توجه کنید:



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۱: احتمال وقوع سه پیشامد A ، B و C به ترتیب برابر است با 0.35 ، 0.45 و 0.20 احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد A ، 0.8 است، احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد B ، 0.3 است و احتمال وقوع پیشامد X به شرط وقوع پیشامد C ، 0.65 است $P(A \mid X)$ کدام است؟

حل : ابتدا باید $P(X)$ (احتمال متوسط) را حساب کنیم:

$$\text{احتمال متوسط} = P(X) = P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)$$

$$P(X) = (0.35)(0.8) + (0.45)(0.3) + (0.20)(0.65) = 0.545$$

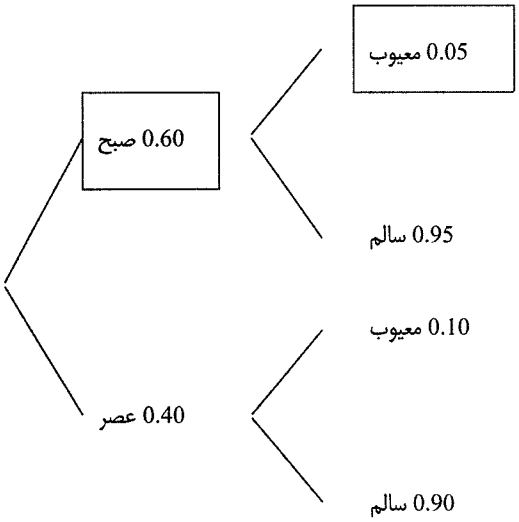
بنابراین:

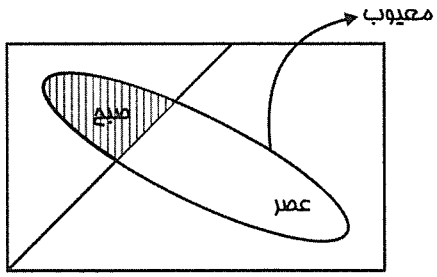
$$P(A \mid X) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(X)} = \frac{(0.35)(0.8)}{0.545} = \frac{0.28}{0.545} \simeq 0.51$$

مثال۲: در کارخانه‌ای 0.60 تولیدات توسط شیفت صبح و 0.40 تولیدات توسط شیفت عصر تولید می‌شود. 5 درصد تولیدات شیفت صبح و 10 درصد تولیدات شیفت عصر معیوبند اگر محصولی که به تصادف انتخاب شده است، معیوب تشخیص داده شود، احتمال آن‌که این محصول توسط شیفت صبح تولید شده باشد، چیست؟(اقتصاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{7}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.





$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح})}{\underbrace{P(\text{صبح})\,P(\text{معیوب} \mid \text{صبح}) + P(\text{عصر})\,P(\text{معیوب} \mid \text{عصر})}_{P(\text{معیوب})}}$$

$$P(\text{صبح} \mid \text{معیوب}) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.60)(0.05) + (0.40)(0.10)} = \frac{0.03}{0.03 + 0.04} = \frac{3}{7}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۳: اطلاعات زیر داده شده است:

$$P(B_1) = 0.2 \,,\, P(A|B_1) = 0.01$$
$$P(B_2) = 0.3 \,,\, P(A|B_2) = 0.02$$
$$P(B_3) = 0.5 \,,\, P(A|B_3) = 0.05$$

مطلوبست احتمال $P(B_2|A)$ ؟ (مدیریت ۷۵)

۱) $\frac{2}{33}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{2}{11}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

بنابرقضیه بیز داریم:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{(0.3)(0.02)}{(0.2)(0.01) + (0.3)(0.02) + (0.5)(0.05)} = \frac{0.006}{0.033} = \frac{2}{11}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل سوم

متغیر تصادفی و توابع توزیع توأم (x , y)

❍ متغیر تصادفی (X)

یک کمیت را وقتی یک متغیر تصادفی می‌گوییم که به عنوان نتیجه‌ای از یک آزمایش مقادیر مختلفی را بگیرد که این مقادیر، قبل از آزمایش مشخص نباشد. که با X نمایش داده می‌شود.

به عبارت دیگر کمیتی است که مقادیر خود را با احتمال دریافت می‌کند و تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است.

به عنوان مثال: در پرتاب سه سکه ما فقط علاقمند به دانستن تعداد شیرها می‌باشیم، بنابراین متغیرتصادفی X نشان‌دهندهٔ تعداد شیرها می‌باشد.

H: شیر و T: خط

فضای نمونه $S=\{\underset{x=3}{\underset{\downarrow}{HHH}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{HHT}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{HTH}}, \underset{x=2}{\underset{\downarrow}{THH}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{HTT}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{THT}}, \underset{x=1}{\underset{\downarrow}{TTH}}, \underset{x=0}{\underset{\downarrow}{TTT}}\}$

بنابراین متغیر تصادفی x اعداد 0، 1، 2، 3 را می‌گیرد، حال می‌توانیم احتمال هر کدام را محاسبه کنیم.

احتمال این که هیچ شیری در پیشامدی مشاهده نشود: $P(X=0)=P(TTT)=\frac{1}{8}$

احتمال این که یک شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=1)=P(HTT , THT , TTH)=\frac{3}{8}$

احتمال این که دو شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=2)=P(HHT , HTH , THH)=\frac{3}{8}$

احتمال این که سه شیر در پیشامد مشاهده شود: $P(X=3)=P(HHH)=\frac{1}{8}$

مثال : یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم، فرض کنید متغیر تصادفی x نشان دهنده مجموع دو عدد ظاهر شده باشد فضای نمونه آزمایش و مقادیر متغیر تصادفی x را مشخص کنید.

حل :

فضای نمونه آزمایش شامل $6^2 = 36$ عضو می‌باشد.

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3) \ldots, (6,6)\}$

$X =$ مجموع دو عدد ظاهر شده = 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11، 12

❍ انواع متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی گسسته : متغیر تصادفی x که روی فضای نمونه گسسته تعریف شود را متغیر تصادفی گسسته می‌نامیم یعنی مقادیری که x می‌تواند بگیرد، **نقاط متناهی** یا **نامتناهی شمارش‌پذیر** است.

مانند: تعداد مشتریان در یک ساعت، تعداد آزمایشات لازم برای اولین پیروزی و .... .

متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی x که روی فضای نمونه پیوسته تعریف شود را، متغیر تصادفی پیوسته می‌نامیم یعنی مقادیری که x می‌تواند بگیرید، مجموعه شمارش ناپذیر است، به عبارتی مجموعهٔ تمامی اعداد حقیقی یا فاصله‌هایی از مجموعهٔ اعداد حقیقی.

مانند: مدت زمان لازم برای اولین اتفاق

❍ تابع احتمال (توزیع احتمال)

تابع احتمال تابعی است که دامنهٔ آن مقادیر ممکن متغیر تصادفی و حوزهٔ آن احتمال مربوط به هر تعداد متغیر تصادفی است. که به دو حالت تابع **احتمال گسسته** و **تابع احتمال پیوسته** بررسی می‌شود.

❍ تابع احتمال گسسته (توزیع احتمال گسسته)

اگر متغیر تصادفی گسسته x مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را با احتمال‌های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ بپذیرد، توزیع احتمال گسسته برای x نامیده می‌شود که با $f(x)$ یا $p(x)$ نمایش می‌دهند.

جدول مربوط به توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته x به صورت زیر می‌باشد:

x	x_1	x_2	.....	x_i	.....	x_n	
$f(x_i) = p(x_i)$	p_1	p_2	.....	p_i	.....	p_n	$\Sigma p(x_i) = \Sigma f(x_i) = 1$

شرایط تابع احتمال گسسته

$1. \forall x \quad f(x) = p(x)$	$f(x)$ در هر نقطه، احتمال در آن نقطه است ؛
$2. \Sigma f(x) = \Sigma p(x) = 1$	مجموع احتمال برابر یک است ؛

• نحوهٔ بدست آوردن توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته y که از متغیر گسستهٔ x تبعیت می‌کند:

۱ـ محاسبهٔ متغیر تصادفی گسسته y : با توجه به رابطهٔ داده شده برحسب x حساب می‌شود.

۲ـ محاسبهٔ $f(y)$: در نقاطی که مقدار متغیر تصادفی $y = f(x)$ بدست آمده از x های متفاوت برابر شوند، درآن نقاط f (x)ها را با هم جمع می‌کنیم ولی در نقاط دیگر $f(x)$ تغییر نمی‌کند.

مثال : توزیع احتمال‌های متغیر تصادفی x توسط جدول‌های زیر بیان شده است، توزیع متغیر y که بر طبق $y = x^2$ از متغیر تصادفی x تبعیت می‌کند، کدام است؟

a.

x_i	-1	0	1	2	
$f(x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(x_i)=1$

$\xrightarrow{y_i = x_i^2}$

$y_i = x_i^2$	0	1	4	
$f(y_i)$	0.2	0.4	0.4	$\Sigma f(y_i)=1$

$$\begin{cases} f(y=0) = f(x=0) = 0.2 \\ f(y=1) = f(x=-1) + f(x=1) = 0.1 + 0.3 = 0.4 \\ f(y=4) = f(x=2) = 0.4 \end{cases}$$

b.

x_i	0	1	2	3	
$f(x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(x_i)=1$

$\xrightarrow{y_i = x_i^2}$

$y_i = x_i^2$	0	1	4	9	
$f(y_i)$	0.1	0.2	0.3	0.4	$\Sigma f(y_i)=1$

$$\begin{cases} f(y=0) = f(x=0) = 0.1 \\ f(y=1) = f(x=1) = 0.2 \\ f(y=4) = f(x=2) = 0.3 \\ f(y=9) = f(x=3) = 0.4 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ تابع احتمال پیوسته (تابع چگالی متغیرپیوسته)

اگر متغیر تصادفی x پیوسته باشد نمودار توزیع احتمال آن پیوسته می‌باشد که آن را تابع چگالی یا تابع احتمال گویند و با $f(x)$ یا $p(x)$ نمایش می‌دهند.

توجه کنید که تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته x را نمی‌توان به صورت جدولی نمایش داد.

• شرایط تابع احتمال پیوسته

تابع چگالی مثبت یا صفر است ؛	$1.\ f(x) \geq 0$
مساحت کل زیر منحنی چگالی برابر یک است ؛	$2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
احتمال دریک نقطه در تابع احتمال پیوسته،صفر است ؛	$3.\ x = a \Rightarrow p(x=a) = 0$
احتمال در هر فاصله، انتگرال در آن فاصله است ؛	$4.\ a < x < b \Rightarrow p(a<x<b) = \int_a^b f(x)dx$
	$5.\ p(a \leq x \leq b) = \cancel{p(x=a)}^{0} + p(a<x<b) + \cancel{p(x=b)}^{0} = p(a<x<b)$

• نحوهٔ بدست آوردن تابع چگالی متغیر تصادفی پیوسته y که از متغیر تصادفی پیوسته x تبعیت می‌کند:

۱) محاسبهٔ $x = g(y)$ با استفاده از $y = f(x)$: یعنی با استفاده از رابطهٔ $y = f(x)$ ، x را برحسب y بدست آوریم.

۲) محاسبهٔ $f(y)$: از رابطهٔ مقابل استفاده می‌شود: $\boxed{f(y) = |g'(y)| f(g(y))}$

توجه کنید علامت | | به معنی قدر مطلق می‌باشد.

بنابراین:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = g(x) \longrightarrow x = g(y) \\ f(y) = |g'(y)| \times f_x(g(y)) \end{array}}$$

مثال ۱: تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x) = \frac{x^2}{63} \quad ; \; 3 < x < 6$$

تابع توزیع کمیت y که بر طبق رابطهٔ $y = -x$ از x تبعیت دارد کدام است؟ (اقتصاد ۷۵)

۱) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2}{63}$

۲) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2 - 6}{63}$

۳) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{y^2 - 3}{63}$

۴) $-6 < y < -3 \, , \, f(y) = \frac{-y^2}{63}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$y = g(x) = -x \;\Rightarrow\; x = -y = g(y)$$

$$\begin{cases} g'(y) = -1 \\ f(g(y)) = \frac{(-y)^2}{63} = \frac{y^2}{63} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(y) = |g'(y)| \, f_x(g(y)) = |-1| \frac{y^2}{63} = \frac{y^2}{63} \\ 3 < x < 6 \xrightarrow{y=-x} -6 < y < -3 \end{cases}$$

مثال ۲: تابع چگالی به صورت $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{a} & 1 \le x \le 5 \\ 0 & \end{cases}$ است، براساس آن تابع چگالی $y = 2 - \frac{1}{5}x$ عبارت است از:

(اقتصاد ۷۹)

۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{y}{9} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} \frac{12+y}{8} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} \frac{y}{12} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

۴) $f(x) = \begin{cases} \frac{12-5y}{4} & 1 \le y \le \frac{9}{5} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در ابتدا لازم است مقدار a محاسبه شود بنابراین:

$$\int_1^5 \frac{x+2}{a} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^5 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \times 20 = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{a = 20}$$

$$y = 2 - \frac{1}{5}x \;\Rightarrow\; 5y = 10 - x \qquad x = 10 - 5y = g(y)$$

$$g'(y) = -5 \;\Rightarrow\; |g'(y)| = 5$$

$$f_x(g(y)) = \frac{10 - 5y + 2}{20} = \frac{12 - 5y}{20} \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(y) = |g'(y)| f(g(y)) = 5\left(\frac{12 - 5y}{20}\right) \\ 1 \le x \le 5 \xrightarrow{y = 2 - \frac{1}{5}x} 1 \le y \le \frac{9}{5} \end{cases}$$

مثال۳: با توجه به جدول، موارد خواسته شده را حساب کنید.

x_i	0	1	2	3	
$p(x_i) = f(x_i)$	0.1	A	0.2	0.3	$\Sigma f(x_i) = 1$

a) مقدار A را بدست آورید.

حل :

$$\Sigma f(x_i) = 1 \;\Rightarrow\; 0.1 + A + 0.2 + 0.3 = 1 \;\Rightarrow\; A = 0.4$$

b) $P(X = 3) = f(X = 3)$

حل :

$$P(X = 3) = 0.3$$

c) $P(X > 2)$

حل :

$$P(X>2) = P(X = 3) = 0.3$$

d) $f(X > \sqrt{5})$

حل :

$$P(X > \sqrt{5}) = P(X = 3) = 0.3$$

e) $f(X>5)$

حل :

$$P(X > 5) = 0$$

f) $f(1.5 < X < 2.5)$

حل :

$$f(1.5 < X < 2.5) = f(X = 2) = 0.2$$

مثال۴: تابع چگالی احتمال $f(x)$ که توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را توصیف می‌کند، کدام ویژگی را ندارد؟

(اقتصاد ۸۰)

۱) به ازاء هر نقطه مانند a ، $p(x = a) \neq 0$

۲) $f(x) \ge 0$ تابع چگالی مثبت یا صفر است.

۳) مساحت کل زیر منحنی چگالی برابر یک است.

۴) سطح زیرمنحنی چگالی بین a و b برابر است با $p(a<x<b)$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : طبق آنچه در شرایط تابع احتمال پیوسته گفته شد گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال۵: تابع احتمال متغیر تصادفی به صورت زیر داده شده است، مقدار k کدام است؟ (اقتصاد ۸۰)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{k} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{سایرمقادیر}\end{cases}$$

۱) 2 ۲) 4 ۳) 8 ۴) 16

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مساحت کل زیرمنحنی چگالی برابر یک است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{k}dx = 1 \Rightarrow \left.\frac{x^2}{2k}\right]_0^4 = 1 \Rightarrow \frac{16}{2k}=1 \Rightarrow \boxed{k=8}$$

نکته : اگر تابع چگالی متغیر تصادفی x به صورت چندضابطه‌ای باشد، لازم است مجموع مساحت‌های کل زیرمنحنی ضابطه‌ها برابر یک شود.

مثال۶: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر داده شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ k-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{برای سایرمقادیر } x\end{cases}$$

مقدار k چقدر است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (k-x)dx = 1$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 + \left.\left(kx-\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}+2k-2-k+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow k=2$$

مثال۷: چگالی احتمال‌های کمیت تصادفی x توسط تابع زیر بیان شده است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{900}x & 0<x\le 30\\ 0 & \text{سایرمقادیر}\end{cases}$$

احتمال آن که متغیر تصادفی x مقدار خود را در فاصله (10 , 5) اختیارکند چقدر است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $\frac{65}{900}$ ۲) $\frac{70}{900}$ ۳) $\frac{75}{900}$ ۴) $\frac{92}{900}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

طبق شرایط تابع احتمال پیوسته، احتمال در هر فاصله انتگرال در آن فاصله است؛

$$P(5<x<10)=\int_5^{10}\frac{2x}{900}\,dx=\left.\frac{x^2}{900}\right]_5^{10}=\frac{75}{900}$$

مثال۸: کمیت تصادفی x در جامعه‌ای بر طبق قانون نمایی توزیع شده است، $f(x)=\frac{1}{20}e^{\frac{-x}{20}}\ 0<x<\infty$ احتمال این که کمیت تصادفی x ، مقداری مساوی با 125 ، اختیار کند، چقدر است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) 1 ۳) 0 ۴) 0.1

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

احتمال در یک نقطه در تابع احتمال پیوسته، صفر است. $P(X=125)=0$

مثال۹: x به عنوان یک متغیر تصادفی معرف طول عمر لامپی است که بین صفر تا 160 ساعت کار می‌کند. احتمال این که این لامپ دقیقاً 80 ساعت کار کند برابر است با: (اقتصاد ۷۵)

۱) صفر

۲) 0.5

۳) این احتمال را تا زمانی که تابع چگالی x مشخص نباشد، نمی‌توان محاسبه کرد.

۴) این احتمال را تا زمانی که میانگین و واریانس x مشخص نباشد، نمی‌توان محاسبه کرد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

متغیر تصادفی x (طول عمر لامپ) پیوسته است، لذا: $P(x=80)=0$

○ تابع توزیع (تابع احتمال تجمعی، Cdf)

تابع توزیع تابعی است که به ازاء جمیع مقادیر ممکن متغیر تصادفی x ، احتمال وقوع مقداری کوچکتر یا مساوی با x را نشان می‌دهد.

تابع توزیع تجمعی را با $P(X\le x)$ یا $F(x)$ نشان می‌دهند که برای دو نوع متغیر تصادفی گسسته و متغیرتصادفی پیوسته به صورت زیر است:

اگر متغیر تصادفی x گسسته باشد ؛	$F_x(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x}f_x(t)$
اگر متغیر تصادفی x پیوسته باشد ؛	$F_x(x)=p(X\le x)=\int_{\text{حدپائین}}^{x}f_x(t)$

• شرایط تابع توزیع تجمعی

۱ـ $F_x(x)$ غیرمنفی است ؛ $0\le F_x\le 1$

۲ـ $F_x(x)$ تابعی غیرنزولی است ؛ $a<b\ \rightarrow\ F(a)\le F(b)$

۳ـ $F_x(x)$ از سمت راست پیوسته است.

۴ـ

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) = 1 \text{ یا } F(\text{حد بالا}) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \text{ یا } F(\text{حد پائین}) = 0$$

۵ـ احتمال این که متغیر تصادفی x بین دو مقدار a و b باشد، مساوی است با تابع توزیع بازای b منهای تابع توزیع به ازای a یعنی:

$$P(a \le x \le b) = p(x = a) + p(a < x < b) + p(x = b)$$

$$= F_x(a^+) - F_x(a^-) + F_x(b^-) - F_x(a^+) + F_x(b^+) - F_x(b^-) = F_x(b^+) - F_x(a^-)$$

۶ـ خاصیت مهم: در صورتی‌که $F_x(x)$ داده شده باشد، در حالت متغیرهای پیوسته:

a. در صورتی‌که هیچ نقطهٔ گسستگی وجود نداشته باشد (تابع توزیع تجمعی پیوسته باشد) ؛

$$\left(F_x(x)\right)' = f_x(x)$$

$$\int_{\text{حدپائین}}^{x} f_x(x)dx = F_x(x) = p(X \le x)$$

b . در صورتی‌که نقطهٔ گسستگی وجود داشته باشد (تابع توزیع تجمعی ناپیوسته باشد)؛

$$f_x(x) = \begin{cases} \left(F(x)\right)' & \text{در فواصل ؛} \\ \left|F_x(x^+) - F_x(x^-)\right| & \text{در نقاط مرزی ؛} \end{cases}$$

۷ـ محاسبهٔ احتمال با استفاده از تابع توزیع تجمعی در نقطهٔ گسسته a به صورت زیر است:

$$p(x = a) = \left|F_x(a^+) - F_x(a^-)\right|$$

در صورت پیوسته بودن تابع توزیع تجمعی در نقطهٔ a :

$$p(x = a) = 0$$

مشتق تابع توزیع تجمعی، $F(x)$، تابع چگالی احتمال است.

انتگرال تابع چگالی احتمال، $f(x)$ ، تابع چگالی تجمعی است.

$$\text{تابع توزیع} \underset{\text{مشتق}}{\overset{\text{انتگرال}}{\rightleftarrows}} \text{تابع چگالی}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: با توجه به $F(x)$ مطلوبست $P(x=2)$؟

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{4} & 0\le x<1\\ \frac{1}{2} & 1\le x<2\\ \frac{x}{3} & 2\le x<3\\ 1 & 3\le x\end{cases}\xrightarrow[\text{در نقاط مرزی}\quad f(x)=F(x^+)-F(x^-)]{\text{در فواصل}\quad f(x)=F'(x)}f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \frac{1}{4} & 0<x<1\\ \frac{1}{4} & x=1\\ \frac{1}{6} & x=2\\ \frac{1}{3} & 2<x<3\\ 0 & x=3\end{cases}$$

حل : در نقاط $x=1,2$ ، $\left(F_x(x^+)\neq F_x(x^-)\right)$ تابع گسسته است و در نقاط $x=0,3$ تابع پیوسته است.

پیوسته: $x=0 \Rightarrow f_x(x)=\left|F_x(x^+)-F_x(x^-)\right|=0$

پیوسته: $0<x<1 \Rightarrow f_x(x)=\left(F_x(x)\right)' \Rightarrow f_x(x)=\frac{1}{4}$

گسسته: $x=1 \Rightarrow f_x(x)=\left|F_x(x^+)-F_x(x^-)\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

گسسته: $x=2 \Rightarrow f_x(x)=\left|F_x(x^+)-F_x(x^-)\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}$

پیوسته: $2<x<3 \Rightarrow f_x(x)=\left(F(x)\right)' \Rightarrow f_x(x)=\frac{1}{3}$

پیوسته: $x=3 \Rightarrow f_x(x)=\left|F_x(x^+)-F_x(x^-)\right|=0$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۲: با توجه به جدول مقابل مطلوبست $F_x(\sqrt{5})$؟

x	−1	0	1	2	4
f(x)	0.1	0.2	0.1	A	0.4

حل : ابتدا باید مقدار مجهول A را پیدا کنیم، پس از خاصیت $\Sigma f(x)=1$ استفاده می‌کنیم:

$$\Sigma f(x)=0.1+0.2+0.1+A+0.4=1 \Rightarrow \boxed{A=0.2}$$

$$F_x(\sqrt{5})=\sum_{\forall x\le\sqrt{5}} f(x)=0.1+0.2+0.1+0.2=0.6 \Rightarrow \boxed{F_x(\sqrt{5})=0.6}$$

مثال۳: کمیت تصادفی x در فاصله (30 , 20) برطبق قانون مستطیلی (یکنواخت) توزیع شده است که تابع چگالی احتمالی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 20\\ \frac{1}{10} & 20<x\le 30\\ 0 & x>30\end{cases}$$

تابع توزیع آن یعنی $F_X(x)=P(X<x)$ یا $F_X(x)=p(X\le x)$ برای این توزیع کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) $F_X(x)=\frac{x}{10}-2$ ۲) $F_X(x)=\frac{x^2}{10}+4$ ۳) $F_X(x)=10+x$ ۴) $F_X(x)=10x$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$F_x(x)=P(X<x)=\int_{20}^{x}\frac{1}{10}dx=\frac{x}{10}\Big]_{20}^{x}=\frac{x}{10}-2$$

مثال۴: تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت x به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x)=\frac{2x+3}{18}\qquad 0<x<3$$

تابع توزیع کمیت تصادفی x کدام است؟ (اقتصاد ۷۴)

۱) $F_x(x)=\frac{2x^2+3x}{18}$ ۲) $F_x(x)=\frac{x^2+3x}{18}$ ۳) $F_x(x)=\frac{x^2}{18}$ ۴) $F_x(x)=\frac{x+3x^2}{18}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$F_x(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{2x+3}{18}dx=\frac{x^2+3x}{18}$$

مثال ۵: تابع توزیع (تجمعی احتمال) متغیر تصادفی x به قرار زیر است:

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{11}{25}x^2-2x & 0<x\le 5\\ 1 & x>5\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال x کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $\frac{11}{25}x-2$ ۲) $\frac{11}{75}x^3-x^2$ ۳) $\frac{11}{50}x+2$ ۴) $\frac{22}{25}x-2$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مشتق تابع توزیع تجمعی احتمال، تابع چگالی احتمال است:

$$\left(F_x(x)\right)'=f(x)=\left[\frac{11}{25}x^2-2x\right]'=\frac{22}{25}x-2$$

مثال۶: اگر تابع توزیع کمیت تصادفی x به صورت زیر باشد:

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x}{10} & 0<x\le 10\\ 1 & x>10\end{cases}$$

احتمال $p(2<x<8)$ کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) 0.2 ۲) 0.4 ۳) 0.6 ۴) 0.8

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$p(2<x<8)=F(8)-F(2)=\frac{8}{10}-\frac{2}{10}=0.6$$

مثال۷: اگر تابع توزیع کمیت تصادفی ناپیوسته x به صورت زیر باشد:

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{2}{10} & 1<x\le 4\\ 1 & x>4\end{cases}$$

تابع احتمال‌های آن کدام است؟

۱)

x	1	4
$p_x(x)$	0.2	0.8

۲)

x	1	4
$p_x(x)$	0.8	0.4

۳)

x	0	1	4
$p_x(x)$	0.2	0.5	0.3

۴)

x	0	1	4
$p_x(x)$	0.3	0.5	0.2

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون تابع توزیع فوق ناپیوسته است (چون حد بالا و پائین این تابع در نقاط 1 و 4 برابر نیستند) بنابراین با توجه به خاصیت 7 داریم:

$$p(x=1)=F(x=1^+)-F(x=1^-)=0.2-0=0.2$$

$$P(x=4)=F(x=4^+)-F(x=4^-)=1-0.2=0.8$$

x	1	4
$p_x(x)$	0.2	0.8

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ نحوهٔ محاسبهٔ مد، میانه، چارک، دهک،صدک

اگر مشتق تابع چگالی را بگیریم و برابر صفر قراردهیم مد یا نما بدست می‌آید.

مد : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = Mo$

$(F(x))'' = 0 \Rightarrow x = Mo$

اگر تابع توزیع تجمعی را برابر $\frac{1}{2}$ قراردهیم میانه بدست می‌آید.

میانه : $\int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{x = \text{میانه}}$

اگر تابع توزیع تجمعی را برابر $\frac{a}{4}$ قرار دهیم، بسته به مقدار a، چارک‌ها به دست می‌آید.

چارک : $\int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = F(x) = \frac{a}{4}\ (a = 1,2,3)$ $\boxed{x = \text{چارک a ام}}$

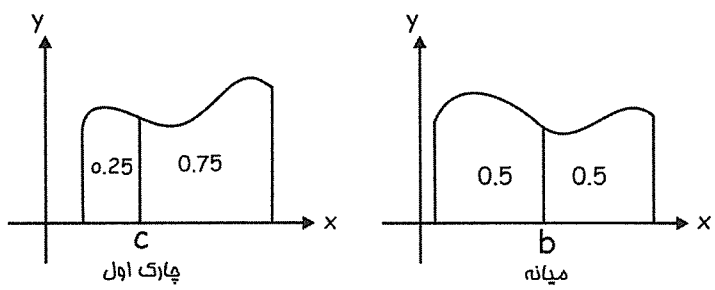
اگر تابع توزیع تجمعی را برابر $\frac{a}{10}$ قرار دهیم، بسته به مقدار a، دهک‌ها به دست می‌آید.

دهک : $\int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = F(x) = \frac{a}{10}(a = 1,2,\ldots,9)$ $\boxed{x = \text{دهک a ام}}$

اگر تابع توزیع تجمعی را برابر $\frac{a}{100}$ قرار دهیم، بسته به مقدار a ، صدک‌ها به دست می‌آید.

صدک: $\int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = F(x) = \frac{a}{100}(a = 1, 2, \ldots, 99)$ $\boxed{x = \text{صدک a ام}}$

به شکل‌های زیر توجه کنید:



مثال ۱: تابع چگالی احتمال‌ها برای کمیت تصادفی x به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad 0 < x < 2$$

میانه را حساب کنید؟ (مدیریت ۷۲)

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\pm\sqrt{2}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\int_{\text{حدپائین}}^{me} f(x)dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{me} \frac{1}{2}xdx = \frac{x^2}{4}\Big]_0^{me} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{me^2}{4} - 0 = \frac{1}{2} \Rightarrow me^2 = 2 \Rightarrow \boxed{me = \sqrt{2}}$$

مثال۲: یک تابع توزیع احتمالی دارای چگالی $f(x) = 1$ است. اگر حدپائین توزیع 3.4 باشد میانه توزیع چقدر است؟

(حسابداری ۷۷)

۱) 3.7 ۲) 3.9 ۳) 4 ۴) 6.8

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$f(x) = \int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{3.4}^{x} 1dx = \frac{1}{2} \Rightarrow x\Big]_{3.4}^{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x - 3.4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = me = md = 3.9}$$

مثال۳: در تابع چگالی زیر صدک 80 چقدر است؟ (حسابداری ۸۲)

$$f(x) = \frac{1}{8}x \quad , \quad 0 < x < 4$$

۱) 2.38 ۲) 3.20 ۳) 3.58 ۴) 12.82

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\int_{\text{حدپائین}}^{x} f(x)dx = \frac{80}{100} \Rightarrow \int_{0}^{x} \frac{1}{8}x\,dx = \frac{80}{100} \Rightarrow \frac{x^2}{16}\Big]_{0}^{x} = \frac{80}{100} \rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\text{صدک هشتادم} = x = 3.58}$$

مثال۴: تابع توزیع کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{3} & 2 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

میانه توزیع کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) 3.5 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 4.5

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\int_{\text{حدپائین}}^{me} f(x)dx = F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow \boxed{x = me = 3.5}$$

مثال۵: تابع توزیع $F(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5\right)$ در دامنه $0 \le x \le 3$ تعریف شده است. نما (مد) آن برابر است با: (اقتصاد ۷۳)

۱) 0.6 ۲) 6 ۳) 3 ۴) 4

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$(F(x))'' = 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{-x^2}{3} + 2x$$

$$F''(x) = f'(x) = -\frac{2x}{3} + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = Mo = 3}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۶: تابع توزیعی تجمعی $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2(3-x) & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ داده شده است. نما تابع توزیع مزبوربرابر است با:(اقتصاد ۷۹)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$(F(x))''=0 \Rightarrow F'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2(3-x)\right)'=3x-\frac{3}{2}x^2$$

$$F''(x)=\left(3x-\frac{3}{2}x^2\right)'=3-3x=0 \Rightarrow \boxed{X=Mo=1}$$

○ امیدریاضی متغیرتصادفی (میانگین، مقدارمتوسط، ارزش انتظاری، μ_x، E (X))

ـ امیدریاضی متغیرتصادفی x، حد متوسطی است که انتظار می‌رود برای متغیر تصادفی x اتفاق بیافتد.

ـ امیدریاضی همان میانگین موزون است که احتمالات درآن، نقش وزن‌ها (ضرایب) را بازی می‌کنند.

ـ دریک مجموعه از مقادیر یک جامعه امیدریاضی مرکز ثقل جامعه است.

امیدریاضی متغیر تصادفی x به صورت زیر نشان داده می‌شود:

امیدریاضی متغیرگسستهٔ x :	$E(x)=\sum_{\forall x} x f_X(x)$:(Σ به شرط همگرایی)
امیدریاضی متغیرپیوسته x :	$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ (∫ به شرط موجود بودن)

● نکات مهم امیدریاضی

۱ـ $\boxed{-\infty<E(x)<+\infty}$

۲ـ امیدریاضی یک تابع از متغیر تصادفی x با تابع توزیع احتمال $f_X(x)$ به فرم زیر است:

گسسته : $E[k(x)]=\sum_{\forall x} k(x)f_X(x)$

پیوسته : $E[k(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} k(x)f_X(x)dx$

۳ـ اگر a و b مقادیر ثابتی فرض شوند، روابط زیر برای امیدریاضی می‌توانند برقرار باشند:

$$E(\pm a)=\pm a$$
$$E(\pm bx)=\pm bE(x)$$
$$E(\pm ax\pm b)=\pm aE(x)\pm b$$

۴ـ اگر x و y دو متغیر تصادفی، $h(x)$ و $g(x)$ توابعی از x باشند، آن‌گاه روابط زیر برای امیدریاضی می‌توانند برقرار باشند:

$$E[g(x)\pm h(x)] = E[g(x)]\pm E[h(x)]$$
$$E(\ldots E(x)) = E(x)$$
$$E(\pm ax \pm by \pm c) = \pm aE(x)\pm bE(x)\pm c$$

۵ـ هنگام محاسبهٔ $E(g(x))$ تابع توزیع $f(x)$ به هیچ شکلی تغییر نمی‌کند، به عنوان مثال:

$$E(x^2) = \sum x^2 f_x(x)$$

۶ـ هرگاه تابع چگالی به ازای x های مثبت تعریف شده باشد یعنی $x > 0$ می‌توان امید ریاضی را به طریق زیر محاسبه کرد:

$$E(x) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$$

مثال۱: تابع چگالی احتمالی متغیر تصادفی پیوسته x به صورت $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ برای $0 \le x \le 2$ داده شده است. میانگین و $p(1 \le x < 2)$ به ترتیب از راست به چپ برابر است با: (اقتصاد ۷۰)

۱) $\frac{3}{4}, 1$ ۲) $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}, 1$ ۴) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$E(x) = \int_0^2 x f(x)dx = \int_0^2 x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg]_0^2 = \frac{4}{2} - \frac{8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{2}{3}}$$

$$p(1 \le x < 2) = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx = \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg]_1^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{p(1 \le x < 2) = \frac{1}{4}}$$

مثال۲: کدام تساوی در مورد عمل‌کننده امیدریاضی غلط است. (a و c مقادیر ثابت هستند)؟ (اقتصاد ۷۰)

۱) $E(c(a + x)) = a + cE(x)$ ۲) $E(a + x) = a + E(x)$

۳) $E[(cx)] = cE(x)$ ۴) $E(a) = a$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E[c(a + x)] = E(ca + cx) = E(ca) + E(cx) = ca + cE(x)$$

مثال۳: تابع چگالی کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$f(x) = \frac{2x}{9} \qquad 0 < x < 3$$

امیدریاضی کمیت تصادفی y که بر طبق رابطه $y = 2x + 1$ از کمیت x تبعیت می‌کند، چقدر است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) 3.5 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 5

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای محاسبهٔ امیدریاضی کمیت تصادفی y، ابتدا باید امیدریاضی کمیت تصادفی x را به دست آوریم:

$$E(x) = \int_0^3 x.f(x)dx = \int_0^3 x.\frac{2x}{9}dx = \int_0^3 \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{2}{27}x^3\Big]_0^3 = 2 \Rightarrow \boxed{E(x) = 2}$$

$$E(y) = E(2x + 1) = 2E(x) + 1 = 2(2) + 1 = 5 \Rightarrow \boxed{E(y) = 5}$$

مثال۴: تابع توزیع (توزیع تجمعی احتمال) کمیت تصادفی x به صورت زیر بیان شده است:

$$F(x) = \frac{x^2 + 3x}{10} \qquad 0 < x < 2$$

امیدریاضی کمیت تصادفی x کدام است؟ (اقتصاد ۷۷)

۱) $E(x) = 0.4$ ۲) $E(x) = 1$ ۳) $E(x) = 1.13$ ۴) $E(x) = 1.5$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

توجه کنید که برای بدست آوردن $E(x)$ ، حتماً باید ابتدا تابع چگالی احتمال ($f(x)$) را حساب کنیم، بنابراین:

$$f_x(x) = \left(F_x(x)\right)' = \left(\frac{x^2 + 3x}{10}\right)' = \frac{2x + 3}{10}$$

$$\int_0^2 x f_x(x)dx = \int_0^2 \frac{x(2x+3)}{10}dx = \frac{1}{10}\int_0^2 \left(2x^2 + 3x\right)dx = \frac{1}{10}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg]_0^2$$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{16}{3} + \frac{12}{2}\right) = 1.13$$

مثال۵: تابع احتمال (قانون توزیع احتمال‌ها)، به صورت زیر تعریف شده است:

x_i	-1	0	1	2
$p(x_i)$	0.3	0.3	0.3	0.1

امیدریاضی x^2، یعنی $E(x^2)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۵)

۱) 0.04 ۲) 0.2 ۳) 1 ۴) 2

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$E(x^2) = \sum x^2.p(x) = (-1)^2(0.3) + (0)^2(0.3) + (1)^2(0.3) + (2)^2(0.1)$$

$$E(x^2) = 0.3 + 0.3 + 0.4 = 1$$

مثال۶: متغیر تصادفی x می‌تواند یکی از سه مقدار 5 و 4 و x_3 را انتخاب کند که احتمال آن‌ها به ترتیب 0.2، 0.5 و P_3 است. اگر میانگین متغیر تصادفی x برابر 6 باشد مقدار x_3 چقدر است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) 2 ۲) 5 ۳) 7 ۴) 10

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

x_i	4	5	x_3	
$p_i = f_i$	0.5	0.2	P_3	$\Sigma p_i = 1$

$$(I)\ \Sigma p_i = 1 \Rightarrow 0.5 + 0.2 + p_3 = 1 \Rightarrow 0.7 + p_3 = 1 \Rightarrow \boxed{p_3 = 0.3}$$

$$(II)\ E(x) = \sum x f_x(x) \Rightarrow 4(0.5) + 5(0.2) + (x_3)(p_3) = 6 \Rightarrow 3 + x_3 p_3 = 6$$

$$\Rightarrow 0.3x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{x_3 = 10}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۷: جدول احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	a

امیدریاضی x کدام است؟ (حسابداری ۷۷)

۱) 1 ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) 2

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

باید جمع احتمالات برابر یک شود، بنابراین:

$$\sum p(x_i)=1 \Rightarrow \frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$E(x)=\Sigma x_i p(x_i) \Rightarrow E(x)=0\left(\frac{1}{6}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$E(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{E(x)=\frac{5}{3}}$$

○ واریانس (پراش،امیدمجذورانحراف از میانگین،مجذورانحراف ازمعیار،Var (x)، V (x)، D (x) ، $\sigma^2(x)$)

واریانس متغیر تصادفی گسستهٔ x که میزان پراکندگی را حول میانگین (امیدریاضی) نشان می‌دهد.

$$\boxed{\sigma_x^2=E(x-\mu)^2=E(x^2)-\mu^2}$$

واریانس را برای دو حالت متغیر تصادفی x گسسته و متغیر تصادفی x پیوسته، به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

متغیرتصادفی x گسسته و f(x) تابع احتمال گسسته: $var(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\sum x^2 f(x)-\mu_x^2=\sum[x-E(x)]^2 f(x)$

متغیرتصادفیxپیوسته وf(x)تابع احتمال‌پیوسته: $var(x)=E(x^2)-(E(x))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\mu_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]^2 f(x)dx$

مثال۱: اگر میانگین و انحراف معیار x برابر 2 باشد، میانگین x^2 چقدر است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 4 ۲) 8 ۳) 16 ۴) 32

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$var(x)=E(x^2)-(E(x))^2 \Rightarrow 4=E(x^2)-(2)^2 \rightarrow 4=E(x^2)-4 \Rightarrow \boxed{E(x^2)=8}$$

مثال۲: تابع چگالی احتمال x به صورت $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{c^2} & 0\le x\le c\\ 0 & \text{سایرنقاط}\end{cases}$ است. c چه مقدار باشد تا این که $\sigma_x^2=2$ گردد. (مدیریت ۸۱)

۱) $c=2$ ۲) $c=4$ ۳) $c=6$ ۴) $c=9$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\sigma_x^2 = 2 \Rightarrow E(x^2) - (E(x))^2 = \int_0^c x^2 . \frac{2x}{c^2} - \left(\int_0^c x \frac{2x}{c^2} dx\right)^2 = 2 \rightarrow \left[\frac{2x^4}{4c^2}\right]_0^c - \left(\left[\frac{2x^3}{3c^2}\right]_0^c\right)^2 = 2$$

$$\rightarrow \frac{c^2}{2} - \left(\frac{2}{3}c\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{c^2}{2} - \frac{4c^2}{9} = 2 \rightarrow \frac{c^2}{18} = 2 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

مثال۳: در صورتی‌که $x = -1 , 0 , 1$ برای $p(x) = \frac{|x| + 1}{5}$ تابع احتمال متغیر تصادفی ناپیوسته x باشد. آن‌گاه امید ریاضی و واریانس x به ترتیب از راست به چپ برابر چیست؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) 0 و $\frac{4}{5}$ ۲) 1 و $\frac{1}{5}$ ۳) 0 و $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$ و $\frac{4}{25}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

x	−1	0	1	
p(x)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\Sigma p(x)=1$

$$E(x) = \Sigma x_i \times p(x_i) = (-1)\left(\frac{2}{5}\right) + (0)\left(\frac{1}{5}\right) + (1)\left(\frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{E(x) = 0}$$

$$\sigma^2(x) = E(x)^2 - (E(x))^2 = \Sigma x_i^2 \times p(x_i) - (\Sigma x_i \times p(x_i))^2$$

$$= \left[(-1)^2\left(\frac{2}{5}\right) + (0)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (1)^2\left(\frac{2}{5}\right)\right] - 0^2 = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\sigma^2(x) = \frac{4}{5}}$$

• خواص واریانس

اگر a و b ثابت باشند:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma^2(\pm ax \pm b) = (\pm a)^2 \sigma^2(x) \Rightarrow \sigma(\pm ax \pm b) = |\pm a| \sigma(x) \\ \sigma^2(b) = 0 \qquad \Rightarrow \sigma(b) = 0 \end{array}}$$

مثال۱: متغیرتصادفی x دارای میانگین 5 و واریانس 9 می‌باشد. میانگین و واریانس $\frac{x-5}{3}$ به ترتیب (از راست یا چپ) کدام است؟

۱) 0 و 1 ۲) 1 و 0 ۳) 5 و 3 ۴) 5 و 9

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{E(x)}{3} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} - \frac{5}{3} = 0$$

$$var\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{var(x)}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ تابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور مرتبه t ام متغیر تصادفی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_x(t) = M_x = E\left(e^{tx}\right) \qquad t \in R$$

تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی گسسته و پیوسته x با تابع احتمال f(x) به صورت زیر است:

متغیر تصادفی x گسسته: $E\left(e^{tx}\right) = M_x(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx} f(x)$

متغیر تصادفی x پیوسته: $E\left(e^{tx}\right) = M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$

نکته : اگر $M_x(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی x باشد، **مشتق r ام تابع مولد گشتاور** نسبت به t زمانی‌که بعد از مشتق‌گیری $t = 0$ را اختیار کنیم، $E\left(x^r\right)$ را تولید می‌کند که برابر گشتاور مرتبهٔ r ام حول مبدأ می‌باشد.

$$M_x^{(r)}(t=0) = \left.\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = E\left(x^r\right)$$

مشتق اول تابع مولدگشتاور، امیدریاضی است ؛

$$E(x) = M'_x(t=0)$$

$$E\left(x^2\right) = M''_x(t=0)$$

$$\vdots$$

$$E\left(x^r\right) = M_x^{(r)}(t=0)$$

مثال ۱: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی x را به صورت $M_x(t) = (1-4t)^{-2}$ ؛ $t<\frac{1}{4}$ داده شده است در این صورت $E\left(x^3\right)$ برابر است با:

۱) $4^6 \times 6$ ۲) $4^4 \times 6$ ۳) $6^4 \times 4$ ۴) $6^6 \times 4$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

اگر از تابع مولد گشتاور، سه مرتبه مشتق گرفته و $t = 0$ قرار دهیم، $E\left(x^3\right)$ بدست می‌آید.

$$M'_x(t) = (-2)(-4)(1-4t)^{-3}$$

$$M''_x(t) = (-2)(-4)(-3)(-4)(1-4t)^{-4}$$

$$M'''_x(t) = (-2)(-4)(-3)(-4)(-4)(-4)(1-4t)^{-5} \quad \Rightarrow \quad M'''_x(t=0) = 4^4 \times 6$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ توزیع احتمال توأم ، چگالی احتمال توأم (مشترک)

اگر x و y دو متغیر تصادفی باشند، احتمال پیشامد همزمان این دو، توزیع احتمال توأم x و y نام دارد و آن را با f(x,y) یا $f_{x,y}(x,y)$ نشان می‌دهند. و دارای خواص زیر است:

$$f(x,y) \geq 0 \qquad ;\forall(x,y)$$

گسسته (الف
$$\begin{cases} \sum\limits_{\forall x} \sum\limits_{\forall y} f(x,y)=1 \\ P\{(x,y)\in A\} = \sum\limits_{\forall (x,y)\in A} \sum f(x,y) = f_{x,y}(x,y) \end{cases}$$

پیوسته (ب
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \\ P\{(x,y)\in A\} = \int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = f_{x,y}(x,y) \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال: دو متغیر تصادفی ناپیوسته (گسسته) X و Y با قانون توزیع (تابع احتمال‌ها) توأم $P(X=x,Y=y)=f(x,y)$ در نظر گرفته می‌شود، کدام یک از روابط زیر برای توزیع فوق صادق است؟(اقتصاد ۷۱)

۱) $\sum\limits_{x} f(x,y)=1$ ۲) $\sum\limits_{x}\sum\limits_{y} f(x,y)=1$ ۳) $\sum\limits_{y} f(x,y)=1$ ۴) هیچ‌کدام

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

گزینه ۱، $\sum\limits_{x} f(x,y)=f(y)$ و گزینه ۳، $\sum\limits_{y} f(x,y)=f(x)$ می‌باشد.

❍ توزیع حاشیه ای یا کناره‌ای y , x

تابع توأم یا تابع چگالی احتمال توأم یکی از دو متغیر است، وقتی که تمام ناحیه تغییرات متغیر دیگر، در نظر گرفته شود.

اگر x و y گسسته باشند:

$$\begin{cases} \text{توزیع حاشیه‌ای } x = f(x) = \sum\limits_{\forall y} f(x,y) \\ \text{توزیع حاشیه‌ای } y = f(y) = \sum\limits_{\forall x} f(x,y) \end{cases}$$

اگر x، y پیوسته باشند:

$$\begin{cases} \text{توزیع حاشیه‌ای } x = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ \text{توزیع حاشیه‌ای } y = f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{cases}$$

نتیجه ۱:

$$\boxed{\text{مستقل } X,Y \Leftrightarrow f(x,y)=f(x)\times f(y)}$$

مثال ۱: تابع احتمال زیر را در نظر بگیرید. (مدیریت ۷۷)

X \ Y	1	2
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) دارای ارتباط مثبت هستند

۲) دارای ارتباط غیر خطی هستند

۳) دارای ارتباط منفی هستند

۴) دو متغیر مستقل هستند

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به جدول زیر x , y مستقل هستند.

X \ Y	1	2	f(x)
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
f(y)	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1

$$f(-1,1)=f_x(-1)f_y(1) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}$$

$$f(-1,2)=f_x(-1)f_y(2) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}$$

$$f(0,1)=f(0)f(1) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}$$

$$f(0,2)=f(0)f(2) \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}$$

مثال ۲: با توجه به تابع احتمال توزیع توأم X و Y آیا X , Y مستقل‌اند؟

$$P_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x,y=(-1,0),(0,1),(1,0)\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

با توجه به جدول زیر x,y مستقل نیستند.

y \ x	-1	0	1	f(y)
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$f(x)=\sum_{\forall y_i} f(x,y_i)$$

$$f(y)=\sum_{\forall x_i} f(x_i,y)$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

توجه کنید که برای استقلال y,x برقراری تساوی $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$ برای تمام xها و yها لازم می‌باشد.

مثال ۳: با توجه به تابع چگالی توأم روبرو آیا x,y مستقل‌اند؟

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}\ ,\ 0\le x\ ,\ 0\le y$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dy=e^{-x}$$

$$f(y)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dx=e^{-y}$$

$$\Rightarrow\ e^{-(x+y)}=e^{-x}.e^{-y}$$

با توجه به f(x),f(y) بدست آمده دیده می‌شود که f(x,y)=f(x)f(y) ، $e^{-(x+y)}=e^{-x}.e^{-y}$ در نتیجه x,y مستقل‌اند.

هرگاه حدود x , y به هم مرتبط نباشند و تابع چگالی توأم x , y را بتوان به صورت دو تابع مجزا از x , y تجزیه کرد، x , y مستقل‌اند. مانند مثال بالا

○ توزیع احتمال شرطی

توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی x در صورتیکه Y=y باشد، چنین است:	$f_{x\|y}\ (x\|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad ;f_Y(y)>0$
توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی y در صورتیکه X= x باشد، چنین است:	$f_{y\|x}(y\|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}\quad ;f_X(x)>0$

مثال ۱: توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی ناپیوسته y و x به شرح جدول زیر است:

x \ y	- 3	2	4
1	0.1	0.2	0.2
3	0.3	0.1	0.1

به نظر شما $P(x=3|y=-3)$ برابر است با؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $\frac{3}{10}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(x=3|y=-3)=\frac{P(x=3\,,\,y=-3)}{P(y=-3)}=\frac{0.3}{0.4}=\frac{3}{4}$$

x \ y	−3	2	4	P(x)
1	0.1	0.2	0.2	0.5
3	0.3	0.1	0.1	0.5
P(y)	0.4	0.3	0.3	1

مثال ۲: اگر در فواصل $0\le y\le 1$ و $0\le x\le 2$ تابع توزیع مشترک این دو متغیر $f(x,y)=\frac{1}{3}(x+y)$ باشد، $f(y|x)$ در همین فواصل برابر است با: (اقتصاد ۷۹)

۱) $\frac{2+3y}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}(x+y^2)$ ۳) $\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$ ۴) $\frac{x+2y}{3}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$f(y|x)=\frac{f(x\,,\,y)}{f(x)}=\frac{\frac{x+y}{3}}{\frac{2x+1}{6}}=\frac{2x+2y}{2x+1}=\frac{2(x+y)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=\varphi(x)=\int_0^1\frac{x+y}{3}dy=\left.\frac{xy+\frac{y^2}{2}}{3}\right]_0^1=\frac{2x+1}{6}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ امید شرطی

امید شرطی Y به شرط X=x طبق رابطه زیر تعریف میشود:

x,y گسسته؛ $E(Y|X=x)=\sum_{\forall y} y\frac{f(x,y)}{f_x(x)}$

x,y پیوسته ؛ $E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{f(x,y)}{f_x(x)}\,dy$

و نیز همین‌طور امید شرطیX به شرط Y=y :

x,y گسسته ؛ $E(X|Y=y)=\sum_{\forall x} x\frac{f(x,y)}{f_y(y)}$

x,y پیوسته ؛ $E(X|Y=y)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f(x,y)}{f_y(y)}\,dx$

مثال۱: توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی X و Y توسط جدول زیر بیان شده است. میانگین شرطی Y بر حسب X=6 کدام است؟ (اقتصاد ۸۱)

X \ Y	2	3	4	5	f(x)
4	0.10	0.05	0.03	0.02	0.20
6	0.05	0.20	0.20	0.05	0.50
8	0.05	0.10	0.10	0.05	0.30
f(y)	0. 2	0.35	0.33	0.12	1

۱) 4.2

۲) 3.8

۳) 3.5

۴) 3

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$E(Y|X=6)=\frac{\sum y_i\times f(X=6,y_i)}{f(X=6)}=\frac{(2\times 0.05)+(3\times 0.20)+(4\times 0.20)+(5\times 0.05)}{0.05+0.20+0.20+0.05}=\frac{1.75}{0.5}=3.5$$

مثال۲: توزیع احتمال مشترک دو متغیره X و Y به صورت جدول زیر است:

x \ y	0	1	2
0	0.20	0.15	0.05
1	0.05	0.20	0.05
2	0.05	0.05	0.20

$E(Y|X=1)$ برابر است با: (اقتصاد ۷۴)

۱) 2 ۲) 1 ۳) 0.5 ۴) 1.5

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

X \ Y	0	1	2	f(x)
0	0.20	0.15	0.05	0.4
1	0.05	0.20	0.05	0.3
2	0.05	0.05	0.20	0.3
f(y)	0.3	0.4	0.3	1

$$E(Y \mid X=1)=\frac{\sum y_i f(X=1, y_i)}{f(X=1)}=\frac{0\times P(X=1,Y=0)+1\times P(X=1,Y=1)+2\times P(X=1,Y=2)}{0.05+0.2+0.05}$$

$$=\frac{0\times 0.05+1\times 0.20+2\times 0.05}{0.3}=\frac{0.3}{0.3}=1$$

نکته : اگر x, y مستقل از هم باشند، آنگاه:

$$\boxed{x \text{ و } y \text{ مستقل‌اند.} \Leftrightarrow \begin{cases} E[x \mid y]=E[x] \\ E[y \mid x]=E[y] \end{cases} \quad \begin{cases} f[x \mid y]=f[x] \\ f[y \mid x]=f[y] \end{cases}}$$

$$\boxed{x \text{ و } y \text{ مستقل‌اند.} \Rightarrow E(xy)=E(x).E(y)}$$

$$\boxed{E[xy]=\begin{cases} \sum\sum xyf(x,y) & \text{در حالت گسسته} \\ \iint xyf(x,y)dxdy & \text{در حالت پیوسته} \end{cases}}$$

توجه: امید ریاضی تابعی از دو متغیر تصادفی x و y به صورت k(x,y) که دارای تابع توزیع توأم $F_{x,y}(x,y)$ است به فرم زیر نشان داده میشود:

$$\boxed{\begin{aligned} &E[k(x,y)]=\sum_x \sum_y k(x,y)f(x,y) \quad \text{گسسته} \\ &E[k(x,y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)f(x,y)dx\,dy \quad \text{پیوسته} \end{aligned}}$$

○کوواریانس (هم‌پراش، Cov (x, y) ، $\sigma_{x,y}$، Sp_{xy})

کوواریانس را امیدریاضی تغییرات دو متغیر برحسب میانگینشان تعریف می‌کنیم.

کوواریانس معیاری عددی است که **نوع و جهت رابطهٔ خطی** بین دو متغیر تصادفی را نشان می‌دهد.

$$\boxed{\begin{aligned} &Cov(x,y)=E(x-E(x))(y-E(y)) \\ &Cov(x,y)=E(xy)-E(x)E(y) \end{aligned}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

توجه:

با افزایش (کاهش) x, y افزایش (کاهش) یابد	رابطهٔ y , x رابطه مستقیم	$\sigma_{xy} = Cov(x,y) > 0$
با افزایش (کاهش) x , y کاهش (افزایش) یابد.	رابطه معکوس	$\sigma_{xy} = Cov(x , y) < 0$
افزایش (کاهش) یک متغیر هیچ تأثیری در دیگری نداشته باشد.	ناهمبسته: مستقل / ارتباط خطی ندارند	$\sigma_{xy} = Cov(x,y) = 0$

نکته :

$$(x , y) \text{ مستقل } \Rightarrow \begin{cases} Cov(x , y) = 0 \\ E(xy) - E(x)E(y) = 0 \end{cases}$$

اما این رابطه عکس ندارد یعنی:

$$\begin{cases} Cov(x , y) = 0 \\ E(xy) - E(x)E(y) = 0 \end{cases} \not\Rightarrow (x , y) \text{ مستقل}$$

• خواص کوواریانس

۱) اگر x , y , z متغیرهای تصادفی و a، b، c ، d، e ، f اعداد ثابتی باشند، آن‌گاه روابط زیر برقرار است.

1) $Cov(x , y) = Cov(y , x) = \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

2) $Cov(x , x) = var(x) = \sigma_x^2$

3) $Cov(x , a) = Cov(a , x) = 0$

4) $Cov(x + b, y + d) = Cov(x , y)$

5) $Cov(ax , by) = ab\, Cov(x , y)$

6) $Cov(ax + b , cy + d) = ac\, Cov(x , y)$

7) $Cov (ax + by + c , dx + ey + f) = ad\, var(x) + be\, var(y) + ae Cov(x , y) + bd\, Cov(x , y)$

8) $Cov (x + y , z) = Cov(x , z) + Cov (y , z)$

9) $Cov(x_1 + x_2 + ... + x_k ,z) = Cov(x_1,z) + Cov(x_2,z) + ... + cov(x_k , z)$

10) $Var(ax \pm by + c) = a^2 var(x) + b^2 Var(y) \pm 2ab Cov(x , y)$

11) $Var(ax \pm by \pm cz + d) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) + c^2 Var(Z) \pm 2ab Cov(x,y)$
$\pm 2ac Cov(x,z) \pm 2bc\, Cov(y,z)$

اگر متغیرهای $x_1, x_2, ..., x_n$ مستقل باشند آن‌گاه:

12) $Var(ax \pm by \pm cZ + d) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) + c^2 Var(Z)$

۲)

- $Cov(x , y) > 0$: x , y رابطهٔ مستقیم و مثبت دارند
- $Cov(x , y) < 0$: x , y رابطهٔ معکوس و منفی دارند
- $Cov(x , y) = 0$: x , y ناهمبسته
  - x, y از هم مستقل هستند
  - x , y اصلاً رابطه خطی با هم نداشته بلکه رابطهٔ غیرخطی دارند.

۳) $\boxed{-\infty < Cov(x , y) < +\infty}$

۴) قبل از محاسبه کوواریانس بهتر است ابتدا مستقل بودن x و y را چک کنیم چون اگر مستقل باشند، $Cov(x , y) = 0$ است.

مثال ۱: با توجه به جدول زیر دربارهٔ استقلال x , y و هم‌چنین Cov (x , y) نظر دهید.

جدول (1) →

y \ x	0	1	f(y)
0	0.15	0.35	0.5
−1	0.15	0.35	0.5
f(x)	0.3	0.7	1

$$E(x) = \Sigma x.f(x) = (0)(0.3) + (1)(0.7) = 0.7$$

$$E(y) = \Sigma y.f(y) = (0)(0.5) + (-1)(0.5) = -0.5$$

$$E(xy) = \Sigma xy f(x,y) = (0)(0)(0.15) + (0)(1)(0.35) + (-1)(0)(0.15) + (-1)(1)(0.35) = -0.35$$

$$\Rightarrow Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = -0.35 - (0.7)(-0.5) = 0 \rightarrow Cov(x,y) = 0$$

نتیجه: با کمی توجه به جدول (1) در می‌یابید که x , y مستقل هستند چون $f(x,y) = f(x).f(y)$ بنابراین بدون محاسبهٔ کوواریانس، می‌توانستیم نتیجه بگیریم که: $Cov(x,y) = 0$

جدول (2) →

y \ x	−1	0	1	f(y)
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(x) = \Sigma x.f(x) = (-1)\left(\frac{1}{3}\right) + (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$E(y) = \Sigma y.f(y) = (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$E(xy) = \Sigma xy.f(x,y) = (0)(-1)(0) + (0)(0)\left(\frac{1}{3}\right) + (0)(1)(0) + (1)(-1)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)(0)(0) + (1)(1)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = 0 - (0)\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow cov(x,y) = 0$$

نتیجه: با کمی توجه به جدول (2) در می‌یابید که y,x مستقل نیستند چون $f(x,y) \neq f(x).f(y)$ ولی با محاسبهٔ کوواریانس به این نتیجه رسیدیم که $Cov(x, y) = 0$ ، بنابراین x , y ارتباط خطی با یکدیگر ندارند.

مثال۲: مقدار کوواریانس تابع احتمال توام زیر چقدر است؟ (حسابداری ۸۰)

۱) صفر ۲) 1 ۳) -0.30 ۴) -0.06

x \ y	0	1
−1	0.30	0.30
0	0.30	0.10

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

ابتدا مستقل بودن x , y را چک می‌کنیم، اگر x و y مستقل باشند $Cov(x, y) = 0$ خواهد شد.

چون $f(x,y) \neq f(x).f(y)$، بنابراین x , y مستقل نیستند پس باید کوواریانس را محاسبه کنیم.

x \ y	0	1	f(x)
−1	0.30	0.30	0.60
0	0.30	0.10	0.40
f(y)	0.60	0.40	1

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$E(x) = \Sigma x . f(x) = (-1)(0.60) + (0)(0.40) = -0.60$$

$$E(y) = \Sigma y.f(x) = (0)(0.6) + (1)(0.4) = 0.4$$

$$E(xy) = \Sigma xy.f(x,y) = (-1)(0)(0.30) + (-1)(1)(0.30) + (0)(0)(0.30) + (0)(1)(0.10) = -0.30$$

$$\Rightarrow \quad cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = -0.30 - (-0.60)(0.4) = -0.30 + 0.24 = -0.06$$

مثال۳: اگر متغیرهای تصادفی x , y , z دارای کمیت‌های $\mu_x = 2$ و $\mu_y = -3$ و $\mu_Z = 4$ و واریانس $\sigma_x^2 = 1$، $\sigma_y^2 = 2$، $\sigma_Z^2 = 2$ و کوواریانس‌های $Cov(x, y) = 1$ و $Cov(x,z) = 1$ و $Cov(y,z) = 1$ باشند، میانگین و واریانس $w = 3x - y + 2z$ کدام است؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) 15 , 14 ۲) 17 , 21 ۳) 17 , 18 ۴) 18 , 18

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$E(w) = E(3x - y + 2z) = E(3x) + E(-y) + E(2z)$$

$$= 3E(x) - E(y) + 2E(Z) = 3\mu_x - \mu_y + 2\mu_z = 3(2) - (-3) + 2(4)$$

$$\Rightarrow \quad E(w) = 6 + 3 + 8 = 17 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(w) = 17}$$

$$Var(w) = Var(3x - y + 2z) = 9Var(x) + Var(y) + 4Var(z) - 6Cov(x,y) + 12cov(x,z) - 4cov(y,z)$$

$$= 9(1) + 2 + 4(2) - 6(1) + 12(1) - 4(1) = 21$$

مثال۴: در صورت صفر بودن کواریانس x , y کدام گزینه صادق است؟ (مدیریت ۷۲)

۱) آن دو متغیر مستقل‌اند.

۲) دارای رابطه غیرخطی می‌باشند.

۳) موارد ۱ و ۲ هر دو صحیح است.

۴) یا دارای رابطه غیرخطی هستند یا هیچ رابطه‌ای با همدیگر ندارند.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

if $Cov(x , y) = 0 \Rightarrow$
- x , y دارای رابطه غیرخطی هستند
- یا
- x , y هیچ رابطه با همدیگر ندارند (مستقل)

مثال۵: دو متغیر مستقل: (اقتصاد ۷۵)

۱) استقلال خطی ندارد.

۲) کوواریانس آن‌ها مخالف صفر است.

۳) مانع الجمع‌اند.

۴) ناهمبسته‌اند.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

y , x مستقل (ناوابسته) $\Rightarrow$
- $Cov (x, y) = 0$
- (x, y) ناهمبسته‌اند.

مثال۶: کدام‌یک از موارد زیر برای $v(x - y)$ صحیح است؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) $v(x) + v(y) - 2Cov(x , y)$

۲) $v(x) - v(y) - Cov(x,y)$

۳) $v(x) + v(y) + 2Cov(x,y)$

۴) $v(x) + v(y) - Cov(x,y)$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$v(x - y) = v(x) + v(y) - 2Cov(x,y)$$

مثال۷: در رابطه با دو متغیر تصادفی x و y کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) اگر $Cov (x , y) = 0$ باشد، دو متغیر تصادفی x , y از لحاظ آماری مستقل از هم می‌باشند.

۲) اگر $P(x \cap y) = P(x).P(y)$ باشد، x , y از لحاظ آماری مستقل از هم می‌باشند.

۳) اگر $Cov(y , x) = 0$ باشد، وابستگی خطی بین x , y وجود ندارد.

۴) $Cov (x, y)$ برابر $E (xy) - E (x) E (y)$ است.

حل : بنابراین گزینه ۱ صحیح نمی‌باشد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۸: چنانچه $w = a + bx$ و $z = c + dy$، $\text{cov}(z , w)$ برحسب x , y عبارت است از: (اقتصاد ۷۸)

۱) $(a + b)(c + d)\,\text{Cov}(x , y)$ ۲) $bd\,\text{Cov}(x, y)$

۳) $(ab + bd)\,\text{Cov}(x , y)$ ۴) $\text{Cov}(x , y)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بنابر قاعده پخشی:

$$\text{Cov}(z,w) = \text{cov}(c + dy , a + bx) = \text{Cov}\,\underset{0}{\cancel{(c , a)}} + \text{Cov}\,\underset{0}{\cancel{(c , bx)}} + \text{Cov}\,\underset{0}{\cancel{(dy , a)}} + \text{cov}(dy,bx) = bd\,\text{Cov}(x,y)$$

مثال۹: اگر x و y دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $E(x) = 3$ و $E(y) = 2$ باشند، کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟(اقتصاد ۸۰)

۱) $\text{Cov}(x , y) = 0$ ۲) $E(x + y) = 5$ ۳) $E(xy) = 6$ ۴) هر سه صحیح است.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$x,y \text{ مستقل} \Rightarrow \text{Cov}(x,y) = 0$$

$$E(x + y) = E(x) + E(y) = 3 + 2 = 5$$

$$E(xy) = E(x)E(y) = (3)(2) = 6$$

توجه: اگر x و y مستقل نباشند، فقط گزینه ۲ صحیح است.

مثال۱۰: اگر $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$ و $\sigma_y^2 = \frac{2}{3}$ و $\sigma_{x+y}^2 = \frac{5}{6}$ باشد، مقدار کوواریانس کدام است؟ (حسابداری ۷۷)

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{6}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\sigma_{(x+y)}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\text{Cov}(x,y)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + 2\,\text{Cov}(x,y) \Rightarrow 2\text{Cov}(x,y) = -\frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{\text{Cov}(x,y) = -\frac{1}{6}}$$

مثال۱۱: در مورد دو متغیر تصادفی X و Y و صحت رابطه امید ریاضی $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}$ می‌توان گفت:(اقتصاد ۸۱)

۱) وقتی صادق است که X و Y مستقل باشند.

۲) وقتی صادق است که X و Y کوواریانس صفر داشته باشند

۳) وقتی صادق است که ناهمبسته باشند.

۴) هیچ وقت صادق نیست

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

اگر x , y از هم مستقل باشند، $x , \frac{1}{y}$ نیز مستقل می‌باشند. $\leftarrow E\left(\frac{x}{y}\right) = E(x)E\left(\frac{1}{y}\right)$

اما هیچ‌گاه $E\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{E(y)}$ نمی‌باشد بنابراین تحت هیچ شرایطی $E\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{E(x)}{E(y)}$ صادق نیست.

❍ همبستگی

تحلیل همبستگی ابزاری است که به وسیلهٔ آن می‌توان درجه‌ای که یک متغیر به متغیری دیگر، **از نظر خطی**، مرتبط است اندازه‌گیری و برای تعیین میزان ارتباط دو متغیر استفاده می‌شود.

در همبستگی دربارهٔ دو معیار **ضریب همبستگی** و **ضریب تعیین** بحث می‌شود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ ضریب همبستگی (Correlation Coefficient)

ضریب همبستگی، درجه وابستگی بین دو متغیر را اندازه‌گیری می‌کند.

اگر به جای x و y مقادیر $\frac{x}{\sigma_x}$ و $\frac{y}{\sigma_y}$ را در فرمول کوواریانس به کار بریم، به معیاری بنام ضریب همبستگی می‌رسیم.

$$\boxed{Cov\left(\frac{x}{\sigma_x}, \frac{y}{\sigma_y}\right) = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = r_{x,y} = \rho_{x,y}}$$

نکته : ضریب همبستگی برای داده‌های آماری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\frac{cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{\frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}{\sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \times \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}}} = \frac{\frac{\sum x_i y_i}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)\left(\frac{\sum y_i}{n}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right)}}}$$

توجه کنید: معیار $Cov(x,y)$ به واحد اندازه‌گیری دو متغیر x و y بستگی دارد اما معیار $Cov\left(\frac{x}{\sigma_x}, \frac{y}{\sigma_y}\right)$ که همان ضریب همبستگی می‌باشد به واحد اندازه‌گیری دو متغیر x و y بستگی ندارد.

مثال : ضریب همبستگی جامعه دو متغیر وابسته x , y برابر است با: (مدیریت ۷۴)

x_i	7	10	4	11
y_i	14	20	8	22

۱) 2 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

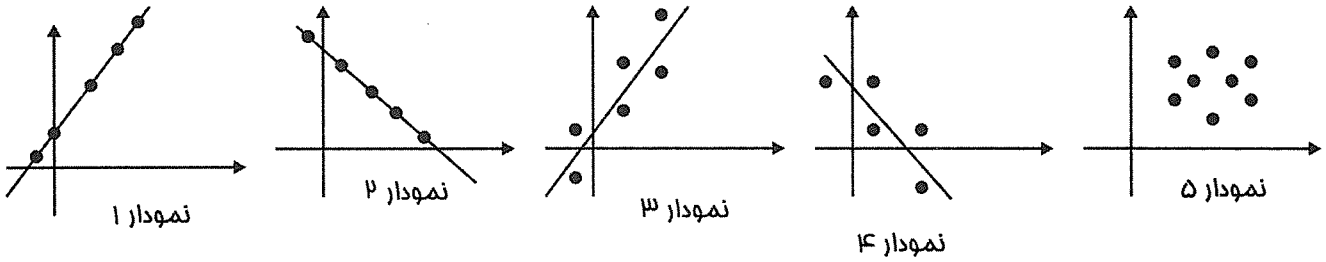
x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
7	14	49	196	98
10	20	100	400	200
4	8	16	64	32
11	22	121	484	242
$\sum x_i = 32$	$\sum y_i = 64$	$\sum x_i^2 = 286$	$\sum y_i^2 = 1144$	$\sum x_i y_i = 572$

$$r_{x,y} = \rho_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2\right)}}$$

$$= \frac{\frac{572}{4} - \frac{32}{4} \times \frac{64}{4}}{\sqrt{\left(\frac{286}{4} - \left(\frac{32}{4}\right)^2\right)\left(\frac{1144}{4} - \left(\frac{64}{4}\right)^2\right)}} = \frac{143 - 8 \times 16}{\sqrt{(71.5 - 64)(286 - 256)}} = \frac{15}{\sqrt{225}} = 1$$

• خواص ضریب همبستگی

۱ ـ همواره رابطهٔ $-1 \le \rho \le 1$ برقرار است.



نمودار ۱	نمودار ۲	نمودار ۳	نمودار ۴	نمودار ۵
$\rho = 1$	$\rho = -1$	$0<\rho<1$	$-1<\rho<0$	$\rho = 0$
بین x و y رابطهٔ مستقیم و کامل	بین x و y رابطهٔ معکوس و کامل	بین x و y رابطه مستقیم و ناقص	بین x و y رابطه معکوس و ناقص	x و y رابطه خطی ندارند.

توجه:

x , y مستقل $\Rightarrow$ $\rho = 0$

$\rho = 0 \Rightarrow$ { x , y مستقل ؛ x,y رابطهٔ خطی ندارند }

۲ ـ هر تغییری روی متغیر x و y تغییری در ρ ایجاد نمی‌کند.

$$\rho_{ax\pm b,\, cy\pm d} = \frac{\operatorname{Cov}(ax \pm b,\, cy \pm d)}{\sigma_{(ax\pm b)}\sigma_{(cy\pm d)}} = \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$= \rho_{x,y}$: اگر c و a هم علامت باشند

$= -\rho_{x,y}$: اگر c و a مختلف العلامه باشند.

$\rho_{x,-x} = -1$

$\rho_{x,x} = 1$

$\rho_{x,a} = 0$

$\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: به شرط صفربودن کوواریانس دو متغیر تصادفی x و y : (اقتصاد ۷۰)

۱) ضریب همبستگی این دو متغیر صفراست.
۲) ضریب همبستگی این دو متغیر مثبت است.
۳) ضریب همبستگی این دو متغیر منفی است.
۴) این دو متغیر مستقل‌اند.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Cov(x,y)=0 \Rightarrow \rho_{x,y}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y}=0 \Rightarrow \rho_{x,y}=0$$

مثال ۲: فرض کنیم تابع چگالی احتمال‌های مشترک دو متغیر x و y نرمال باشد، در این صورت اگر کوواریانس x و y صفر باشد؟(اقتصاد ۸۰)

۱) ضریب همبستگی x و y مثبت است.
۲) x و y می‌توانند مستقل نباشند.
۳) x و y مستقل از هم هستند.
۴) ضریب همبستگی x و y منفی است.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تنها و تنها در توزیع نرمال هرگاه یکی از شرایط * اتفاق بیفتد قطعاً x , y مستقل بوده‌اند اما در شرایط دیگر همان وضعیتی است که قبلاً صحبت کردیم.

$$*\begin{cases}\rho_{xy}=0\\ Cov(x,y)=0\\ E(xy)=E(x)E(y)\end{cases}$$

مثال ۳: اگر $Cov(x,y)=10$ و $\sigma_x=5$ و $\sigma_y=3$ باشد، ضریب همبستگی کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) هیچکدام

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\rho_{x,y}=\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x.\sigma_y}=\frac{10}{(5)(3)}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

مثال ۴: ضریب همبستگی $-5x+\frac{2}{3}$ و $3x$ برابر است با: (اقتصاد ۷۶)

۱) -1
۲) -0.82
۳) 0.82
۴) +1

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به خواص ضریب همبستگی داریم:

$$\rho_{3x,-5x+\frac{2}{3}}=\rho_{x,-x}=-1$$

○ ضریب تعیین (ضریب تشخیص، R^2، r^2)

- ضریب تعیین مهمترین معیاری است که با آن می‌توان رابطهٔ بین دومتغیر x و y را توضیح داد.
- ضریب تعیین، بیان‌کنندهٔ درصد تغییرات تابعی یعنی y به وسیله تغییرات متغیر مستقل x می‌باشد.
- ضریب تعیین معلوم می‌کند که چند درصد از تغییرات y ناشی از تغییرات x است.
- ضریب تعیین R^2 با معلوم بودن ضریب همبستگی $\rho(r)$ برابر است با: $\boxed{R^2=r^2}$

نکته۱: قوت ارتباط توسط ضریب تعیین مشخص می‌شود.

نکته۲: $1 - R^2$ نشان می‌دهد چند درصد تغییرات y توسط x بیان نمی‌شود.

مثال۱: اگر $Cov(x, y) = 32.4$ و $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 36$ باشد، ضریب تعیین (تشخیص) چقدراست؟ (مدیریت ۸۱)

۱) 0.04 ۲) 0.72 ۳) 0.81 ۴) 0.90

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\rho = r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{32.4}{(6)(6)} = 0.9 \rightarrow r^2 = (0.9)^2 = 0.81$$

مثال۲: اگر کوواریانس دو صفت متغیر x و y برابر $\sigma_{xy} = Cov(x, y) = -27$ باشد و واریانس هریک به ترتیب $\sigma_x^2 = 36$ و $\sigma_y^2 = 25$ به دست آمده باشد، چند درصد تغییرات y به وسیله x بیان شده است؟ (مدیریت ۷۲)

۱) %76 ۲) %81 ۳) %95 ۴) %78

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{-27}{\sqrt{36}\sqrt{25}} = -\frac{27}{6 \times 5} = -0.9 \rightarrow r^2 = (-0.9)^2 = 0.81 \rightarrow 0.81 \times 100 = \%81$$

%81 تغییرات y به وسیله x بیان شده است.

مثال۳: اگر ضریب همبستگی بین دو متغیر 0.6 و دو متغیر دیگر 0.3 باشد، می‌توان گفت همبستگی دو متغیر اول « چند برابر قوی‌تر» از دو متغیر دوم است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) دو برابر ۲) سه برابر ۳) چهاربرابر ۴) نه برابر

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

طبق نکتهٔ گفته شده، قوت ارتباط توسط ضریب تعیین مشخص می‌شود:

ضریب تعیین دو متغیر اول: $R^2_{x,y} = (0.6)^2$

ضریب تعیین دو متغیر دوم: $R^2_{Z,t} = (0.3)^2$

$$\Rightarrow \frac{R^2_{x,y}}{R^2_{z,t}} = \frac{(0.6)^2}{(0.3)^2} = 4 \Rightarrow$$ چهاربرابر

❍ رگرسیون

از جمله اهداف تحقیقات آماری پیش‌بینی تغییرات یک متغیر وابسته برحسب یک متغیر مستقل در جامعه می‌باشد اگر x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته در نظر بگیریم به طور مثال پیش‌بینی (میزان مخارج مصرفی خانوارها = y) برحسب (درآمد خانوار = x) یا (میزان سرمایه‌گذاری = y) برحسب (نرخ بهره = x) از جمله مطالعاتی است که می‌تواند برای تعیین میزان ارتباط y , x انجام گیرد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

برای تعیین میزان ارتباط و همبستگی میان متغیر مستقل X و متغیر وابسته Y، به ازاء هر مقدار x_i متعلق به X مقدار متناظر آن y_i متعلق به Y را به‌دست می‌آوریم. در این حالت برای $i = 1, 2, \dots, n$ نقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ به‌دست می‌آید.

در صورتیکه این نقاط را روی صفحه مختصات مشخص کنیم، از بین همه خطوطی که می‌توانند از بین نقاط عبور کنند فقط یک خط وجود دارد که از بیشتر نقاط از جمله نقطه میانگین $(\bar{X}, \bar{Y})$ عبور کرده و فاصله آن نسبت به بقیه نقاط می‌نیمم می‌باشد، این خط همان خط برازش یا خط رگرسیون به شکل $y = ax + b$ می‌باشد، که در آن y به عنوان متغیر وابسته تابعی از متغیر مستقل x می‌باشد.

نکته : با استفاده از خط رگرسیون می‌توان به ازاء هر مقدار مشخص x مقدار y را پیش‌بینی نمود.

● تشکیل معادله خط رگرسیون $y = ax + b$

برای به‌دست آوردن معادلهٔ خط رگرسیون، بایستی ضرایب معادله خط یعنی a (شیب خط) و ثابت b (عرض از مبدأ) را به شرح زیر محاسبه کنیم.

ابتدا شیب خط (a) را محاسبه کرده، سپس از آنجائی‌که معادله خط رگرسیون همیشه از نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ یعنی نقطه میانگین عبور می‌کند به راحتی می‌توانیم مقدار b (عرض از مبدأ) را از رابطهٔ $\bar{y} = a\bar{x} + b$ بعد از محاسبه a، به‌دست آوریم.

۱) محاسبه شیب خط (a)

برای محاسبه مقدار a (شیب خط) باتوجه به داده‌های مسئله می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{\text{شیب خط} = a = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \rho_{x,y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma x} = \frac{SP_{xy}}{SS_x}} \qquad (I)$$

در صورتیکه در رابطه (I) فرمول‌های آماری σ_x^2 , $\operatorname{cov}(x, y)$ را در نظر بگیریم به رابطه (II) می‌رسیم.

$$\boxed{\text{شیب خط} = a = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}}{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}}} \qquad (II)$$

نکته ۱: دقت کنید، که در داده‌های آماری روابط زیر صادق هستند:

$$\boxed{SP_{xy} = \sum (x-\bar{x})(y-\bar{y}) \quad ; \quad SS_x = \sum (x-\bar{x})^2}$$

نکته ۲: با توجه به داده‌های مسئله می‌توان از یکی از روابط (I) یا (II) برای محاسبه شیب خط استفاده کرد.

نکته ۳: معادله رگرسیون خطی x بر حسب y به صورت $x = a'y + b'$ می‌باشد که a' شیب معادله و b' عرض از مبدأ است.

$$\boxed{a' = \frac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma_y^2} \quad ; \quad b' = \bar{x} - a'\bar{y}}$$

نکته۴: اگر معادله رگرسیون خطی y برحسب x به صورت $y = a + bx$ و معادله رگرسیون خطی x برحسب y به صورت $x = a'y + b'$ باشد رابطه زیر برقرار است:

$$\boxed{r^2 = aa' \Rightarrow \rho = r = \sqrt{aa'}}$$

مثال : در یک جامعه نرمال دو بعدی معادلات رگرسیون y برحسب x و x برحسب y به صورت زیر به دست آمده است. ضریب تعیین $\left(r^2\right)$ کدام است؟

$\hat{y}_x = 4.85 - 3.2x$ ، $\hat{x}_y = 8.32 - 0.28y$

حل:

$$r^2 = aa' = (-3.2)(-0.28) = 0.896$$

۲) محاسبه عرض از مبدأ (b):

بعد از محاسبه شیب خط (a) باتوجه به آن‌که معادلهٔ خط رگرسیون همیشه از نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ یعنی نقطه میانگین عبور می‌کند، به راحتی می‌توانیم مقدار b (عرض از مبدأ) را از رابطه:

$$\boxed{\bar{y} = a\bar{x} + b}$$

با معلوم بودن مقدار a (شیب خط) و $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ و $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$ به‌دست می‌آوریم.

نکته : در بعضی مراجع معادله خط رگرسیون به صورت $y = bx + a$ ارائه می‌گردد که در این حالت b (شیب خط) و a (عرض از مبدأ) می‌باشد.

مثال ۱ : اگر $SP_{xy} = 20$ و $SS_x = 20$ و $SS_y = 20$ و $\bar{X} = 5$ و $\bar{y} = 4$ باشد. معادله خط رگرسیون برابر است با: (مدیریت ۷۹)

۱) $y = -x + 1$ ۲) $y = x - 1$ ۳) $y = x + 1$ ۴) $y = \frac{x}{2} + 1$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} a = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{20}{20} = 1 \quad ① \\ \bar{y} = a\bar{x} + b \rightarrow b = 4 - 1 \times 5 = -1 \quad ② \\ y = ax + b \xrightarrow{①,②} y = x - 1 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

راه تستی: با توجه به این نکته که نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ همیشه از معادله خط رگرسیون برآورد شده می‌گذرد. با قرار دادن مقدار $\bar{x}, \bar{y}$ در معادلات رگرسیون گزینه‌ها به راحتی گزینه صحیح را می‌یابیم در واقع گزینه‌ای که $\bar{x}, \bar{y}$ در معادله آن صدق کند، جواب است.

مثال ۲ : اگر شیب معادله رگرسیون -10 باشد، $\sum x = 100$ و $\bar{X} = 20$ و $\sum y = 20$ باشد، ثابت معادله کدام است؟ (مدیریت ۷۴)

۱) 106 ۲) 110 ۳) 220 ۴) 204

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} ① \ \bar{X} = \dfrac{\sum x}{n} \Rightarrow 20 = \dfrac{100}{n} \Rightarrow n = 5 \\ ② \ \bar{Y} = \dfrac{\sum y}{n} = \dfrac{20}{5} = 4 \\ ③ \ a = \text{شیب خط} = -10 \end{cases} \xrightarrow{①,②,③} \begin{cases} \bar{y} = a\bar{x} + b \\ 4 = -10 \times 20 + b \rightarrow b = 204 \end{cases}$$

مثال ۳ : با استفاده از اطلاعات زیر معادله رگرسیون کدام است؟ (حسابداری ۸۱)

$$\sum y = 50 , \sum x = 75 , n = 25 , \sum y^2 = 228 , \sum xy = 30 , \sum x^2 = 625$$

۱) $y = 2.9 - 0.3x$ ۲) $y = 2.9 - 0.15x$ ۳) $y = 5.8 - 0.3x$ ۴) $y = 8.7 - 0.6x$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 3 , \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = 2$$

$$(\mathrm{I}) \ a = \frac{\dfrac{\sum xy}{n} - \dfrac{\sum x}{n} \times \dfrac{\sum y}{n}}{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2} = -0.3$$

$$(\mathrm{II}) \ \bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow 2 = -0.3 \times 3 + b \rightarrow b = 2.9$$

$$\xrightarrow{(\mathrm{I}),(\mathrm{II})} \boxed{\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = -0.3x + 2.9 \end{array}}$$

مثال ۴ : شیب خط رگرسیون $y = a + bx$ چقدر است؟ (حسابداری ۸۲)

x	0	1	3	4	5
y	0	2	5	9	11

۱) 0.31 ۲) 1.21 ۳) 1.8 ۴) 2.2

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

x^2	x	y	xy
0	0	0	0
1	1	2	2
9	3	5	15
16	4	9	36
25	5	11	55
$\sum x^2 = 51$	$\sum x = 13$	$\sum y = 27$	$\sum xy = 108$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$b = \text{شیب خط} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{108}{5} - \frac{13}{5} \times \frac{27}{5}}{\frac{51}{5} - \left(\frac{13}{5}\right)^2} = 2.2$$

مثال ۵ : فرض کنید $\text{cov}(x, y) = 12$ و $n = 10$ و $\sum x = \sum y = 50$ و $\sigma_x = 4$ و $\sigma_y = 3$ است. معادله رگرسیون y برحسب x کدام است؟

۱) $y = 1.5 - 0.3x$ ۲) $y = 1.25 + 0.75x$ ۳) $y = 1.5 + 0.4x$ ۴) $y = 3 + 2.2x$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 5 , \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = 5 \\ (I)\ a = \text{شیب خط} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75 \\ (II)\ \bar{y} = a\bar{x} + b \rightarrow 5 = 0.75 \times 5 + b \rightarrow b = 1.25 \end{cases} \xrightarrow{(I),(II)} \begin{array}{l} y = ax + b \\ y = 0.75x + 1.25 \end{array}$$

نکته۱: علامت شیب خط معادله رگرسیون $y = ax + b$ یعنی علامت a همان علامت کوواریانس $(\text{cov}(x, y))$ و ضریب همبستگی $(\rho_{x,y})$ می‌باشد، در نتیجه با داشتن معادله خط می‌توانیم از روی علامت شیب خط جهت ارتباط x , y را به‌دست آوریم.

مثال۶: اگر از معادله خط رگرسیون برآوردی به صورت $\hat{y} = 2.4 - 0.6x$ به دست آمده و ضریب تعیین 0.49 باشد، ضریب همبستگی کدام است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) $+0.7$ ۲) -0.49 ۳) ± 0.7 ۴) -0.7

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

از آن‌جایی که علامت شیب خط رگرسیون منفی است (-0.6) و با توجه به نکته فوق علامت شیب خط رگرسیون و ضریب همبستگی یکسان می‌باشد. بنابراین:

$$r^2 = 0.49 \Rightarrow r = \sqrt{r^2} = \begin{cases} -0.7 & \text{قابل قبول} \\ +0.7 \end{cases}$$

○ پیش‌بینی مقدار y

از جمله کاربردهای معادله خط رگرسیون $y = ax + b$، پیش‌بینی مقدار متغیر وابسته y به ازاء هر مقدار از متغیر مستقل x می‌باشد، برای رسیدن به این هدف معادله خط رگرسیون را به‌دست آورده سپس مقدار x را در آن قرار داده تا مقدار پیش‌بینی شدهٔ y به‌دست آید.

مثال ۱ : رابطه بین میانگین x , y خطی است و داده‌های نمونه به شرح زیر در دست است:

$$\sum x_i y_i = 1150 , \bar{Y} = 10 , n = 20 , \sum x_i^2 = 550 , \bar{X} = 5$$

مقدار پیش‌بینی شده به ازای $x = 6$ برابر است با: (مدیریت ۷۴)

۱) 10 ۲) 11 ۳) 12 ۴) 13

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

ابتدا معادله خط رگرسیون را به‌دست آورده سپس $x = 6$ را در آن قرار داده تا مقدار پیش‌بینی شدهٔ y به‌دست آید.

$$\begin{cases} y = ax + b \xrightarrow{①,②} y = 3x - 5 \\ ① \; a = \dfrac{\dfrac{\sum xy}{n} - \dfrac{\sum x}{n} \times \dfrac{\sum y}{n}}{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{1150}{20} - 5 \times 10}{\dfrac{550}{20} - 5^2} = 3 \\ ② \; \bar{y} = a\bar{x} + b \longrightarrow 10 = 3 \times 5 + b \longrightarrow b = -5 \end{cases}$$

باتوجه به معادله خط $y = 3x - 5$ در صورتیکه $x = 6$ را در آن قرار دهیم مقدار پیش‌بینی شدهٔ y برابر 13 به‌دست می‌آید.

مثال ۲ : اگر $Cov(x , y) = -10$ و $\sigma_x = \sigma_y = 2$ و $\bar{X} = \bar{Y} = 10$ باشد، مقدار پیش‌بینی شدهٔ y به ازاء $x = 4$، چقدر است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) 25 ۲) 128.75 ۳) 32.25 ۴) 40

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ابتدا معادله خط رگرسیون را به‌دست آورده، سپس $x = 4$ را در آن قرار داده تا مقدار پیش‌بینی شدهٔ y به‌دست آید.

$$\begin{cases} y = ax + b \xrightarrow{①,②} y = -2.5x + 35 \\ ① \; a = \dfrac{cov(x , y)}{\sigma_x^2} = \dfrac{-10}{4} = -2.5 \\ ② \; \bar{y} = a\bar{x} + b \rightarrow 10 = -2.5 \times 10 + b \rightarrow b = 35 \end{cases}$$

باتوجه به معادله خط $y = -2.5x + 35$ در صورتیکه $x = 4$ را در آن قرار دهیم مقدار پیش‌بینی شده y برابر 25 به‌دست می‌آید.

نکته۲: همان‌طور که در نکته ۱ مطرح شد، علامت شیب خط معادله رگرسیون $y = ax + b$ همان علامت کواریانس $(cov(x , y))$ و ضریب همبستگی $(\rho_{x , y} = r_{x , y})$ می‌باشد و جهت ارتباط x , y را مشخص می‌کند. در عین حال با استفاده از نقاط واقعی (x , y) می‌توان شدت ارتباط x , y را در معادله خط مشخص کرد. در صورتیکه یک نقطه واقعی (x , y) در معادله خط رگرسیون $y = ax + b$ صدق نکند مشخص می‌شود که ارتباط x , y ناقص است. برای آن‌که ارتباط x , y کامل باشد باید خط رگرسیون از تمام نقاط واقعی (x , y) عبور کند و همه نقاط واقعی (x , y) در معادله خط صدق کنند، بنابراین در صورتیکه نقطه واقعی (x , y) در معادله خط رگرسیون صدق کند، دلیلی بر کامل بودن ارتباط x , y نبوده و باید همه نقاط واقعی را در معادله خط رگرسیون بررسی کرد.

مثال۳: معادله رگرسیون $y = 400 - 20x$ را در نظر بگیرید. مقدار واقعی y به ازاء $x = 15$ برابر با 150 است. ضریب همبستگی کدام است؟ (مدیریت ۷۳)

۱) $0 < r < 1$ ۲) $-1 < r < 0$ ۳) $r = 1$ ۴) $r = -1$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

باتوجه به آن‌که شیب خط $y = 400 - 20x$ منفی می‌باشد $(a = -20)$ بنابراین جهت ارتباط x , y معکوس و ضریب همبستگی منفی است. $(r < 0)$

لذا باتوجه به تحلیل ضریب همبستگی زمانیکه ضریب همبستگی منفی می‌باشد دو وضعیت وجود خواهد داشت:

ارتباط معکوس و کامل	$r = -1$
ارتباط معکوس و ناقص	$-1 < r < 0$

از آنجائیکه نقطه واقعی $(x = 15 , y = 150)$ در معادله خط رگرسیون $y = 400 - 20x$ صدق نمی‌کند، بنابراین ارتباط x , y ناقص بوده و $-1 < r < 0$ خواهد بود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل چهارم

توزیع‌های گسسته و پیوسته

❍ توزیع‌های مهم گسسته

۱ـ توزیع یکنواخت :

اگر یک متغیر تصادفی بتواند n مقدار مختلف را با احتمال‌های یکسان اختیار کند، گوییم که دارای توزیع یکنواخت گسسته است و به آن متغیر تصادفی یکنواخت گسسته گوییم.

در این توزیع x_i ها هم تراز فرض می‌شوند. بنابراین اگر $x_1,.....x_n$ ، n حالت متمایز باشند،

$$f_x(x_i) = P(x = x_i) = \frac{1}{n} \quad ; i = 1,2,...,n$$

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \mu)^2$$

$$M_x(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{tx}}{n}$$

نکته :در حالت خاص برای متغیر تصادفی با توزیع دنباله‌ای از n عدد طبیعی که از ۱ شروع می‌شوند داریم:

$$\boxed{\mu = \frac{n+1}{2} \quad ; \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}}$$

و اگر توزیع x روی دنباله‌ای به فرم $a, a+d, a+2d,.....,a+(n-1)d$ انجام شود آنگاه :

$$\boxed{\mu = a + \frac{(n-1)d}{2}}$$

مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم، متغیر تصادفی x نشان‌دهندهٔ شمارهٔ روی تاس می‌باشد. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی x را به دست آورید.

حل :

$$f_x(x) = \frac{1}{6}, \; x = 1, 2, \dots, 6$$

$$E(x) = \frac{6+1}{2} = 3.5, \; var(x) = \frac{6^2 - 1}{12} = 2.92$$

۲ـ توزیع برنولی (دو نقطه‌ای):

فرض کنید آزمایشی دو نتیجه ممکن داشته باشد که به پیروزی و شکست معروف‌اند، این آزمایش را برنولی می‌نامیم. احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با $q = 1 - p$ نمایش می‌دهیم. متغیر تصادفی X را تعداد پیروزی‌ها در یک آزمایش تعریف می‌کنیم بدیهی است تعداد پیروزی‌ها برابر 1 یا صفر است. چنین متغیر تصادفی، متغیر تصادفی برنولی نامیده می‌شود و تابع احتمال X به صورت زیر است:

x	0	1
$f_x(x)$	$1-p$	p

x : تعداد پیروزی یا شکست در یک بار آزمایش برد و باخت دارای توزیع برنولی است.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = p^x q^{1-x} \quad ; x = 0,1 \;\; ; p+q=1 \\ \mu = p \\ \sigma^2 = pq \\ M_x(t) = (pe^t + q) \end{array}}$$

مثال: اگر کمیت تصادفی X بر طبق قانون دو نقطه‌ای با تابع احتمال زیر توزیع شده باشد:

$$P_x(x) = p^x q^{1-x} \qquad \begin{array}{l} x = 0, 1 \\ q = 1 - p \end{array}$$

امید ریاضی آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) $\frac{pq}{n}$ ۲) $p(1-p)$ ۳) p ۴) np

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

توزیع برنولی (دو نقطه ای است) بنابراین امید ریاضی p است.

$$E(X) = \Sigma x \,.\, f(x) = \sum_{x=0}^{1} x \,.\, p^x q^{1-x} = 0 + pq^0 = p$$

۳ـ توزیع دو جمله‌ای (بینم): $(X \sim Bin(n,p))$

فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال پیروزی p را با n بار به طور مستقل تکرار کنیم. تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش متغیری تصادفی است که آن را متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌گوییم.

در n بار آزمایش مستقل برنولی تعداد پیروزی یا شکست از توزیع دو جمله‌ای تبعیت می‌کند. (p پیروزی + q شکست = 1)

$$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}\ ;x=0,1,2,.....,n$$

$$\mu=np$$

$$\sigma^2=npq$$

$$M_x(t)=\left(pe^t+q\right)^n$$

نکته:

۱) در حالت خاص n=1 به توزیع برنولی می‌رسیم .

۲) در توزیع دو جمله‌ای باید همواره به دو نکته توجه نمود:

الف ـ جای هیچ برد و باختی مشخص نیست

ب ـ جامعه نامحدود است

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۱: از کیسه‌ای که شامل 9 گلوله سفید و یک گلوله سیاه است n = 100 بار مکرراً یک گلوله را به طور تصادفی انتخاب کرده و پس از مشاهده رنگ گلوله انتخاب شده، مجدداً آن را به کیسه باز می‌گردانند امید ریاضی تعداد گلوله‌های سیاه در این 100 آزمایش کدام است؟ (اقتصاد ۷۰)

۱) 90 ۲) 1 ۳) 10 ۴) 9

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تعداد گلوله‌های سیاه بر طبق قانون توزیع دو جمله‌ای توزیع می‌گردند.

$$P=p\ (\text{سیاه})=\frac{1}{10}\ ،\ q=p\ (\text{سفید})=\frac{9}{10}\ ،\ n=100$$

$$E(X)=n\,.\,p=100\times\frac{1}{10}=10$$

مثال۲: احتمال این که در یک خط تولید، محصول تولید شده، غیراستاندارد باشد، 0.2 است، از این خط تولید n = 100 واحد محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. متغیر (کمیت) تصادفی X عبارت است از تعداد محصولات غیراستاندارد بین محصولات انتخاب شده، قانون توزیع احتمال‌های متغیر (کمیت) تصادفی X کدام است؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) $P(x)=0.2\,(0.8)^{x-1}$

۲) $P(x)=C_{100}^{x}\left(\frac{2}{10}\right)^x\left(\frac{8}{10}\right)^{100-x}$

۳) $P(x)=\frac{20^x\times e^{-20}}{x!}$

۴) $P(x)=0.2^x(1-0.2)^{1-x}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

قانون توزیع دو جمله‌ای است .

$$p=p\ (\text{غیر استاندارد})=0.2\ \Rightarrow\ q=1-p=0.8\ ,\ n=100$$

$$f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{100}{x}(0.2)^x(0.8)^{100-x}=C_{100}^{x}(0.2)^x(0.8)^{100-x}$$

مثال۳: اگر X متغیری تصادفی با توزیع دو جمله‌ای و دو پارامتر n و p باشد، $E\left(\frac{X}{n}\right)$ برابر خواهد شد با: (اقتصاد ۷۳)

۱) np ۲) npq ۳) p ۴) $\sqrt{npq}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در توزیع دوجمله‌ای $E(x)=np$ است. درنتیجه:

$$E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{E(x)}{n}=\frac{np}{n}=p$$

مثال۴: میانگین و واریانس شماره فرد در 20 بار پرتاب یک تاس سالم چقدر است؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) 10 و 5 ۲) 10 و 4 ۳) 10 و 10 ۴) 5 و 5

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در توزیع دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$p\ (\text{فرد})=\frac{1}{2}\ ،\ p\ (\text{زوج})=\frac{1}{2}\ ،\ n=20$$

$$E(X)=np=20\times\frac{1}{2}=10$$

$$Var\ (X)=n\times p\times q=20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5$$

مثال۵: اگر X_1 و X_2 و ... و X_n هر یک دارای توزیع برنولی $p=0.3$ و از هم مستقل باشند، توزیع دقیق $y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ (اقتصاد ۷۴)

۱) فوق هندسی است. ۲) برنولی است با میانگین 10.5 و انحراف معیار $\sqrt{7.35}$

۳) نرمال است با میانگین 10.5 و واریانس $\sqrt{7.3}$ ۴) دو جمله‌ای است.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مجموع n توزیع برنولی، دارای توزیع دوجمله‌ای است.

مثال۶: در یک توزیع دو جمله‌ای اگر $\mu_x=3$, $\sigma_x=\sqrt{\frac{6}{5}}$ باشد، تعداد آزمایش‌ها (n) کدام است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) 3 ۲) 4 ۳) 5 ۴) 6

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\mu_X=E(X)=np=3\ \Rightarrow\ \frac{3}{5}n=3\ \Rightarrow\ n=5$$

$$\sigma_X=\sqrt{npq}=\sqrt{\frac{6}{5}}\rightarrow npq=\frac{6}{5}\ \Rightarrow\ 3q=\frac{6}{5}\ \Rightarrow\ q=\frac{2}{5}\ \Rightarrow\ p=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

مثال۷: اگر کمیت X برطبق قانون دوجمله‌ای $X \sim Bin(8 \text{ و } 0.3)$ توزیع شده باشد و $P(X=2)=0.294$ باشد، $P(X=3)$ برابر است با: (مدیریت ۷۸)

۱) 0.126 ۲) 0.504 ۳) 0.063 ۴) 0.252

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برطبق قانون دو جمله‌ای داریم:

$$X \sim Bin(n, p) \Rightarrow Bin(8, 0.3) \Rightarrow n=8 \ , \ p=0.3 \ , \ q=0.7$$

$$P(X=3)=\binom{8}{3}(0.3)^3(0.7)^5=0.252$$

مثال۸: در یک توزیع دوجمله‌ای میانگین برابر 5 و واریانس برابر $\frac{15}{4}$ است. مقدار $P(X=0)$ در این توزیع برابر است با: (اقتصاد ۸۰)

۱) $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$ ۲) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ۳) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ ۴) $\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\mu = np \Rightarrow \frac{1}{4}n=5 \Rightarrow n=20$$

$$\sigma^2=npq \Rightarrow 5q=\frac{15}{4} \Rightarrow q=\frac{3}{4} \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{20}=\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$$

نکته: مد در توزیع دوجمله‌ای برابر است با $[(n+1)P]$ که [ ] نماد جزء صحیح است یا به عبارت دیگر:

$(n+1)p-1$	$(n+1)p$
$np-q \le$ محتمل‌ترین تعداد وقوع پیروزی $\le np+p$	
یک شکست کمتر	یک پیروزی بیشتر

مثال۹: در یک توزیع دو جمله‌ای امید وقوع S، سه برابر امید وقوع F است. اگر در این توزیع دو جمله‌ای n=10 باشد محتمل‌ترین تعداد باری که S رخ می‌دهد برابر است با؟

۱) 4 ۲) 8 ۳) 5 ۴) 2

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} p=\frac{3}{4} \\ q=\frac{1}{4} \\ n=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 11\times\frac{3}{4}-1 \le S \text{ محتمل‌ترین تعداد وقوع } \le 11\times\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{n=8} \quad \text{یا} \quad \left[(10+1)\times\frac{3}{4}\right]=8$$

$$7.25 \le S \text{ محتمل‌ترین تعداد وقوع } \le 8.25$$

در فاصلهٔ $[7.25 , 8.25]$، تنها عدد صحیح موجود، 8 می‌باشد، بنابراین محتمل‌ترین تعداد باری که S رخ می‌دهد $n=8$ است.

۴ـ توزیع چندجمله‌ای

اگر در جامعه‌ای وضعیت‌های $x_1, x_2, ..., x_k$ با احتمال‌های مربوطهٔ $P_1, P_2, ..., P_n$ وجود داشته باشد جامعه را **چند جمله‌ای** گوییم. و رابطه زیر برای آن برقرار است.

$$f_{x_1,x_2,...,x_k}(x_1, x_2, ..., x_k) = \binom{n}{x_1, x_2, ..., x_n} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ..... p_k^{x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! ..... x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} .... p_k^{x_k}$$

مثال ۱: 0.2 افراد جامعه‌ای شاغل ، 0.3 بیکار هستند. احتمال آن‌که در یک نمونه 6 نفری، 2 نفر شاغل و یک نفر بیکار باشد را محاسبه کنید.

حل : می‌دانیم که $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ در نتیجه

$$p = \frac{6!}{2!\,1!\,3!}(0.2)^2 (0.3)^1 (0.5)^3$$

مثال ۲: اظهار نظر حسابرسان راجع به حساب‌های شرکتی ممکن است، قبول، مردود و مشروط باشد. در سال 0.20 ، 0.30 و 0.50 نظرها به ترتیب قبول، مردود و مشروط بوده است. شش شرکت به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند. میانگین و واریانس شرکت‌های مشروط به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (مدیریت ۸۲)

۱) (1.2 و 1.2)　　۲) (1.8 و 1.2)　　۳) (3 و 1.5)　　۴) (3 و 3)

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

بر طبق توزیع چند جمله‌ای $p = 0.5$ برای شرکت‌های مشروط، $q = 0.2 + 0.3 = 0.5$ برای شرکت‌های غیر مشروط

$$E(X) = n \,.\, p \quad \Rightarrow \quad E(X) = 6 \times 0.5 = 3$$

$$Var(X) = n \,.\, p \,.\, q \quad \Rightarrow \quad Var(X) = 6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.5$$

۵ـ توزیع دو جمله‌ای منفی

فرض کنید یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به r امین موفقیت دست یابیم. تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به r امین موفقیت متغیری تصادفی است که آن را متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی می‌گوییم.

x : تعداد آزمایشهای لازم برای رسیدن به r امین موفقیت.

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \quad ; \quad x = r, r+1, ...; \quad q = 1-p$$

$$\mu = \frac{r}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{r\ q}{p^2}$$

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-q\ e^t}\right)^r$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: احتمال این‌که هر پرتاب بازیکنی به هدف بخورد 0.8 است. احتمال این‌که سومین پرتابی که به هدف می‌خورد، پنجمین پرتاب وی باشد، چقدر است؟ (حسابداری ۸۲)

۱) 0.123 ۲) 0.512 ۳) 0.64 ۴) 0.991

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

بنابر توزیع دو جمله‌ای منفی

$$f_x(x)=\binom{x-1}{k-1}p^k q^{x-k} \quad , \quad p=0.8 \quad , \quad x=5 \quad , \quad k=3$$

$$f_x(5)=\binom{5-1}{3-1}\left(\frac{8}{10}\right)^3\left(\frac{2}{10}\right)^2=6\times\frac{512}{1000}\times\frac{4}{100}=0.123$$

مثال ۲: اگر تا انهدام کامل یک هدف، به سوی آن شلیک شود و فرض کنیم که احتمال اصابت هر راکت به هدف 0.3 است، برای انهدام کامل هدف، اصابت دو راکت لازم است. احتمال این‌که با شلیک پنجمین راکت، هدف کاملاً نابود شود، چند است؟

۱) 0.6225 ۲) 0.1235 ۳) 0.2425 ۴) 0.4245

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$p(x=5)=\binom{4}{1}q^3p^2=4(0.7)^3(0.3)^2=0.1235$$

مثال ۳: احتمال قبول شدن یک فرد در امتحانی 0.2 می‌باشد. مطلوب است محاسبه احتمال آن‌که این فرد در دفعه هفتم برای بار سوم قبول شود؟

حل :

$$P=\binom{6}{2}(0.8)^4(0.2)^3=\%4.91$$

چون فرد در دفعه هفتم برای دفعه سوم قبول شده ، بنابراین دو بار در دفعات قبلی نیز قبول شده است که تعداد حالات ممکن آن $\binom{6}{2}$ است.

۶ـ توزیع هندسی

در توزیع دوجمله‌ای منفی دیدیم که یک آزمایش برنولی را مستقلاً آن قدر تکرار می‌کنیم تا به r امین موفقیت دست یابیم. حال اگر r = 1 باشد یعنی یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت p را به طور مستقل آن قدر تکرار کنیم تا به اولین موفقیت دست یابیم. تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین موفقیت متغیر تصادفی هندسی است.

x : تعداد آزمایشهای لازم برای رسیدن به اولین موفقیت.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

از قرار دادن r=1 در توزیع دو جمله‌ای منفی به این توزیع می‌رسیم .

$$f(x)=P^1(1-P)^{x-1}=pq^{x-1} \quad ; \quad x=1,2,\ldots \; ; q=1-p$$
$$\mu=\frac{1}{P}$$
$$\sigma^2=\frac{q}{P^2}$$
$$M_x(t)=\frac{Pe^t}{1-\ qe^t}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$E(x)=\frac{1}{P}$ = متوسط تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین پیروزی

مثال۱: احتمال این‌که فردی از چراغ قرمز عبور کند و پلیس متوجه نشود 0.40 است. احتمال این‌که در حین عبور از چهارمین چراغ قرمز بالاخره جریمه شود، چقدر است؟ (حسابداری ۸۱)

۱) 0.0384 ۲) 0.0864 ۳) 0.216 ۴) 0.60

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

بنابر توزیع هندسی خواهیم داشت:

$p=0.6 \quad , \quad q=0.4 \quad , \quad x=4$

$f_X(x)=pq^{x-1}=(0.6)(0.4)^3=0.0384$

مثال۲: 10 درصد تولیدات کارخانه‌ای معیوبند. احتمال این‌که سومین کالای کنترل شده، اولین کالای معیوب باشد، چقدر است؟ (مدیریت۷۵)

۱) 0.001 ۲) 0.081 ۳) 0.10 ۴) 0.817

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برطبق قانون هندسی داریم: $P=0.10 \ , \ q=0.90$

$f(x)=pq^{x-1} \quad \Rightarrow \quad f(3)=(0.1)(0.9)^2=0.081$

مثال۳: احتمال اصابت موشکی به یک جنگنده 0.3 است. با اصابت یک موشک، جنگنده سقوط خواهد کرد. احتمال این‌که در پرتاب پنجمین موشک، جنگنده سقوط کند، چقدر است؟ (حسابداری ۷۸)

۱) 0.05 ۲) 0.005 ۳) 0.072 ۳) 0.081

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برطبق توزیع هندسی داریم: $p=0.3 \ , \ q=0.7 \ , \ x=5$

$f(x)=q^{x-1}p \quad \Rightarrow \quad f(5)=(0.7)^{5-1}(0.3)^1=0.072$

مثال۴: در یک ظرف 10 توپ سفید و 5 توپ سیاه داریم، یک توپ به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. پس از مشاهده رنگ آن، مجدداً آن را به داخل ظرف باز می‌گردانیم و این عمل را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا توپ سیاه انتخاب شود، متوسط تعداد انتخاب (تکرار) کدام است؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) 3 ۲) 5 ۳) 6 ۴) 2

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

انتخاب توپ سیاه بر طبق توزیع هندسی است، زیرا احتمال ثابت است و تا انتخاب توپ سیاه، آزمایش ادامه دارد.

$$p = p\ (\text{سیاه}) = \frac{5}{15} \quad ، \quad q = p\ (\text{سفید}) = \frac{10}{15}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{5}{15}} = 3$$

۷ـ توزیع فوق هندسی (هیپرژئومتریک)

در تعریف توزیع دوجمله‌ای دیدیم که اگر n آزمایش برنولی را بطور مستقل (با جایگذاری) انجام دهیم، تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش متغیر تصادفی دوجمله‌ای خواهد بود.

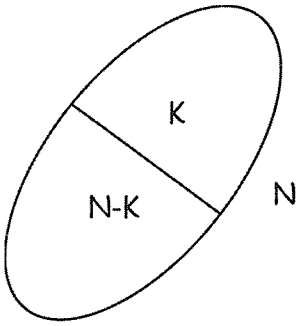
جامعه‌ای با N عضو، را به دو قسمت K و N-K عضوی تقسیم می‌کنیم . و یک نمونهٔ n تائی از آن انتخاب می‌کنیم :

x : تعداد نمونه‌هائی که متعلق به قسمت k تائی هستند:

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \; ; x = 0,1,2,\ldots\ldots,\min(k\ ,\ n)$$

$$\mu = n\frac{k}{N}$$

$$\sigma^2 = n \times \frac{k}{N} \times \left(1 - \frac{k}{N}\right) \times \frac{N-n}{N-1}$$



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

● تقریب فوق هندسی به دوجمله‌ای

اگر $\frac{n}{N} < 0.05$ باشد . آنگاه می‌توانیم به جای این توزیع از توزیع دو جمله‌ای استفاده کنیم. بصورت:

$$P = \frac{k}{N} \; ; q = 1 - \frac{k}{N}$$

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \times n \times p \times q$$

نکته :به $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب تصحیح توزیع فوق هندسی می‌گویند . که با 1 شدن آن دقیقاً به توزیع دو جمله‌ای می‌رسیم .

مثال ۱: در یک کارخانه با200 قطعه تولیدی 8 قطعه معیوب است یک نمونه ده‌تایی از آن انتخاب می‌کنیم مطلوبست احتمال آن که 1 قطعه از نمونه معیوب باشد:

حل :

$$N = 200\ ,\ n = 10\ ,\ k = 8\ ,\ x = 1$$

$$P(x=1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{192}{9}}{\binom{200}{10}} = 0.2878$$

مثال۲: از جوراب‌های بسته‌بندی شده در جعبه‌ای 9 عدد سالم و 3 عدد معیوب است. یک مشتری به طور تصادفی 4 عدد را خریداری می‌کند. میانگین و واریانس تعداد جوراب‌های معیوب در این خرید به ترتیب از چپ به راست چقدر است؟ (اقتصاد ۷۳)

۱) 1 و $\frac{6}{11}$ ۲) 1 و $\frac{3}{4}$ ۳) 1 و $\frac{27}{12}$ ۴) 2 و $\frac{9}{12}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

توجه: در مسائلی که در صورت سؤال عنوان نشده است انتخاب بدون جایگذاری یا باجایگذاری است، پیش‌فرض برای حل مسئله « بدون جایگذاری» می‌باشد.

چون انتخاب بدون جای‌گذاری است، پس تعداد انتخاب بر طبق توزیع فوق هندسی می‌باشد.

$$N=12 \quad , \quad n=4 \quad , \quad k=3$$

$$E(X)=np=n\times\frac{k}{N}=4\times\frac{3}{12}=1$$

$$Var=n\,.\,p\,.\,q\,.\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=4\times\frac{3}{12}\times\frac{9}{12}\times\frac{12-4}{12-1}=\frac{6}{11}$$

مثال۳: کیسه‌ای حاوی 5 مهره قرمز و 4 مهره سفید است. سه مهره بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌شود، توزیع احتمال تعداد مهره‌های قرمز کدام یک است؟ (اقتصاد ۷۵)

۱) پواسن ۲) دو جمله‌ای ۳) فوق هندسی ۴) یکنواخت

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$f_X(x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}} \quad ، \; x=0,1,2,3$$

مثال۴: در یک پارتیشن از محصولات تولید شده به حجم $N=10$ که تعداد $M=2$ محصول آن غیراستاندارد می‌باشد، به طور تصادفی 4 واحد محصول را انتخاب می‌کنیم، احتمال این که هیچ یک از محصولات غیراستاندارد نباشد، چقدر است؟ (اقتصاد ۷۶)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{1}{3}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

بر اساس قانون توزیع فوق هندسی داریم:

$$f_X(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \;\Rightarrow\; f_X(0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{1}{3}$$

مثال۵: از یک جامعه 4000 نفره یک نمونهٔ تصادفی 40 تایی انتخاب شده است. در این حالت تابع احتمال متغیر تصادفی X ، کدام است؟ (حسابداری ۸۱)

۱) هندسی
۲) دوجمله‌ای
۳) فوق هندسی
۴) هم فوق هندسی و هم دو جمله‌ای

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در صورتیکه در توزیع فوق هندسی $\frac{n}{N} \le 0.05$ باشد توزیع فوق هندسی تقریبی از توزیع دو جمله‌ای است. $\frac{n}{N} = \frac{40}{4000} = 0.01 < 0.05$

N: تعداد اعضای جامعه

n: تعداد اعضای نمونه

۸ـ توزیع پواسن

آزمایش پواسون آزمایشی است که تعداد وقایع (تعداد پیروزی‌ها) را در یک فاصله زمانی یا مکانی به دست می‌دهد.

x : تعداد اتفاقات در یک فاصله زمانی یا مکانی

λ: متوسط تعداد اتفاقات در یک فاصله زمانی یا مکانی

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \quad \lambda^x}{x\ !} \quad ; \quad x = 0,1,2,.....$$
$$\mu = E(x) = \lambda$$
$$\sigma_x^2 = \lambda$$
$$M_x \ (t) = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

نکته :

۱ـ مد توزیع پواسن یک عدد صحیح است که در رابطه روبه‌رو صدق می‌کند. $\boxed{mo = [\lambda]}$ یا $\boxed{\lambda - 1 \le mo \le \lambda}$

منظور از نماد [ ] جزء صحیح است.

۲ ـ λ با توجه به تغییر فاصله زمانی یا مکانی باید به یک نسبت تغییر کند.

۳ـ در حل مسائل e برابر 2.718 در نظر گرفته می‌شود.

۴ـ در حل مسائل مربوط به توزیع پواسن هر گاه λ برای یک واحد زمانی یا مکانی خاص داده شده باشد، برای محاسبه λ برای یک واحد زمانی یا مکانی دیگر باید λ اصلی را در ضریبی ضرب کرد. به مثال زیر توجه کنید:

$\lambda = 1$ برای نیم ساعت $\Rightarrow \lambda = 2$ برای یک ساعت $\Rightarrow \lambda = 0.5$ برای یک ربع

مثال۱: تعداد قطعات معیوب در هر روز بر روی یک ماشین از توزیع پواسن برخوردار است و دارای متوسط 5 قطعه معیوب در روز است. احتمال این‌که در یک روز هیچ قطعهٔ معیوبی تولید نشود، چقدر است؟ (حسابداری ۷۹)

۱) $\frac{1}{5}e^{-1.5}$
۲) $5e^{5}$
۳) e^{-5}
۴) $5e^{-5}$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برطبق توزیع پواسن داریم: $\lambda = 5$ قطعه معیوب در روز و چون مسئله محاسبهٔ احتمال را در یک روز خواسته λ تغییری نمی‌کند.

$$f(x)=\frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow f(0)=\frac{5^0 \times e^{-5}}{0!}=e^{-5}$$

مثال۲: در یک نوار خاص، به طور متوسط یک عیب در هر 220 متر وجود دارد، احتمال این‌که 2 عیب در یک بسته 880 متری وجود داشته باشد، کدام است؟ (مدیریت ۷۳)

۱) e^{-4} ۲) e^{-1} ۳) $4e^{-1}$ ۴) $8e^{-4}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

بر طبق توزیع پواسن $\lambda = 1$ عیب در 220 متر و $\lambda = 1\times 4 = 4$ عیب در 880 متر.

$$f_x(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow f(2)=\frac{4^2 \times e^{-4}}{2!}=8e^{-4}$$

مثال۳: در یک توزیع پواسن اگر $P(X=1)=P(X=2)$ باشد، آن‌گاه مقدار $P(X=0)$ برابر است با: (اقتصاد ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $2e^{-2}$ ۳) e^{-1} ۴) e^{-2}

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(X=1)=P(X=2) \Rightarrow \frac{e^{-\lambda}.\lambda}{1!}=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} \Rightarrow 2\lambda=\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \text{ یا } \lambda=2$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}.2^0}{0!}=e^{-2}$$

مثال۴: اگر واریانس تعداد مراجعین به یک بانک در ساعت خاصی از روز 4 نفر باشند، احتمال این‌که در ربع اول ساعت کسی به بانک مراجعه نکند، چقدر است؟ (اقتصاد ۷۹)

۱) $\frac{1}{e^2}$ ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e^{-4} ۴) $e^{\frac{1}{2}}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بر طبق توزیع پواسن $E(x)=\sigma^2(x)=\lambda$ در نتیجه در این سوال $\sigma^2=\lambda=4$ نفر در ساعت است.بنابراین $\lambda=\frac{4}{4}=1$ نفر در یک ربع است. و خواهیم داشت:

$$p(X=x)=\frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \Rightarrow P(X=0)=\frac{1^0 \times e^{-1}}{0!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

مثال۵: در یک توزیع پواسن $\frac{P(X=0)}{P(X=1)}=\frac{1}{3}$ است، میانگین این توزیع برابر است با: (اقتصاد ۷۹)

۱) 2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 5

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

بر طبق توزیع پواسن $E(x)=\sigma^2(x)=\lambda$ در نتیجه:

$$\frac{P(X=0)}{P(X=1)}=\frac{\frac{\lambda^0.\cancel{e^{-\lambda}}}{0!}}{\frac{\lambda^1.\cancel{e^{-\lambda}}}{1!}}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \lambda=3\Rightarrow E(x)=\lambda=3$$

مثال۶: به طور متوسط 6 ماشین در دقیقه از یک جاده می‌گذرد، عرض جاده به اندازه عبور یک اتومبیل است. شخصی بدون توجه به عبور ماشین‌ها عرض جاده را در 10 ثانیه می‌پیماید، احتمال سالم ماندن او چقدر است؟ (مدیریت ۷۷)

۱) e^{-1} ۲) $1-e^{-1}$ ۳) e^{-6} ۴) $1-e^{-6}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برطبق قانون پواسن داریم: $\lambda=6$ ماشین در دقیقه در نتیجه $\lambda=\frac{6}{6}=1$ ماشین در 10 ثانیه. برای آنکه شخص سالم بماند نباید در مدت 10 ثانیه هیچ ماشینی عبور کند. بنابراین باید $p(x=0)$ را محاسبه کنیم.

$$f_X(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\ \Rightarrow\ f(0)=\frac{1^0\times e^{-1}}{0!}=e^{-1}$$

مثال۷: یک دستگاه مکانیکی به طور متوسط 24 بار در سال نیاز به تعمیر دارد، احتمال این‌که در ماه حداقل یک‌بار تعمیر شود، چقدر است؟ (مدیریت ۷۶)

۱) $1-e^{-2}$ ۲) $1-e^{-24}$ ۳) e^{-2} ۴) e^{-24}

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برطبق توزیع پواسن داریم. $\lambda=24$ دستگاه در سال و $\lambda=\frac{24}{12}=2$ دستگاه در ماه :

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{2^0\times e^{-2}}{0!}=1-e^{-2}$$

● تقریب دوجمله‌ای به پواسون

بعضی اوقات می‌توان در حل مسائل به جای استفاده از توزیع دو جمله‌ای از تقریب پواسن استفاده نمود. برای این کار باید یکی از جفت شرط‌های زیر برقرار باشد:

1) $np\leq 10$,	$n\geq 100$
2) $p\leq 0.05$,	$n\geq 20$

در این صورت داریم:

$$\boxed{p_{(\lambda)}=\frac{e^{-np}(np)^x}{x!}\qquad \lambda=np}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۱: در کدام‌یک از موارد زیر توزیع پواسن تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای است؟ (اقتصاد ۸۰)

۱) $n = 25$ و $p = 0.04$ ۲) $n = 50$ و $p = 0.28$ ۳) $n = 60$ و $p = 0.58$ ۴) $n = 150$ و $p = 0.93$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در توزیع دوجمله‌ای در دو وضعیت زیر می‌توانیم از تقریب توزیع پواسن استفاده کنیم.

$$\begin{cases} n \geq 20 , p \leq 0.05 \\ n \geq 100 , np \leq 10 \end{cases}$$

در این مسئله در گزینه ۱ با توجه به آنکه n=25 و p=0.04 است، در شرایط بالا صدق می‌کند و بقیه گزینه‌ها شرط لازم را ندارند.

مثال۲: در صورتی که یک توزیع دو جمله‌ای دارای 100 تکرار باشد و احتمال موفقیت در هر تکرار 0.01 باشد، بهترین توزیع برای تقریب احتمال‌های آن کدام است؟ (حسابداری ۸۰)

۱) نمایی ۲) نرمال ۳) پواسن ۴) یکنواخت

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در توزیع دوجمله‌ای در دو وضعیت زیر می‌توانیم از تقریب توزیع پواسن استفاده کنیم.

$$\begin{cases} n \geq 20 , p \leq 0.05 \\ n \geq 100 , np \leq 10 \end{cases}$$

در این مسئله $np = 100 \times 0.01 = 1 \leq 10$ است. در نتیجه تقریب پواسن بهتر است.

مثال۳: نسبت خرابی کالا در یک کارخانه برابر 0.01 است. احتمال آن‌که در 100 کالا حداکثر یک کالای خراب وجود داشته باشد، چقدر است؟ (مدیریت ۷۹)

۱) e^2 ۲) e^{-2} ۳) $2e$ ۴) $2e^{-1}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در یک توزیع دو جمله‌ای هرگاه $\begin{cases} n \geq 20 , p \leq 0.05 \\ n \geq 100 , np \leq 10 \end{cases}$ درنتیجه می‌توانیم از تقریب پواسن استفاده کنیم و $\lambda = np$ در نظر گرفته می‌شود . در این مثال نیز: $n = 100 \ , \ p = 0.01 \Rightarrow np = 1 \leq 10$ در نتیجه $\lambda = np = 1$ در نظر گرفته و خواهیم داشت:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1^0 \times e^{-1}}{0!} + \frac{1 \times e^{-1}}{1!} = 2e^{-1}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ توزیع‌های مهم پیوسته

۱ـ توزیع یکنواخت پیوسته :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$\mu=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_x(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)^t}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال ۱: واریانس متغیر تصادفی x با چگالی $\left\{f(x)=\frac{2}{3}\,\middle|\,-1<x<\frac{1}{2}\right\}$ کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{9}{4}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$f(x)=\frac{2}{3}$ تابع چگالی یکنواخت پیوسته در فاصله $-1<x<\frac{1}{2}$ است.

بنابراین واریانس آن $\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{\left(\frac{1}{2}-(-1)\right)^2}{12}=\frac{\frac{9}{4}}{12}=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$ خواهد بود.

مثال ۲: میانگین متغیر تصادفی X با این تابع چگالی احتمال‌ها چقدر است؟ (مدیریت ۷۸)

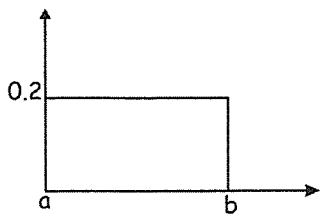
$$\varphi(x)=\frac{2}{3}\qquad -1\le x\le\frac{1}{2}$$

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$f(x)=\frac{2}{3}$ تابع چگالی یکنواخت پیوسته در فاصله $-1<x<\frac{1}{2}$ است. بنابراین میانگین آن $\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{1}{2}+(-1)}{2}=-\frac{1}{4}$ خواهد بود.

مثال۳: فرض کنید در شکل زیر متغیر تصادفی X توزیع یکنواخت دارد، c را به نحوی پیدا کنید که $P(x \le c) = 0.6$ باشد.



۱) 3

۲) 4

۳) 5

۴) 6

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a} \Rightarrow 0.2 = \frac{1}{b-0} \Rightarrow b = 5$$

$$P(X \le c) = 0.6 \Rightarrow \int_0^c \frac{1}{5} dx = 0.6 \Rightarrow \left[\frac{1}{5}x\right]_0^c = 0.6 \Rightarrow c = 3$$

۲ـ توزیع نمائی

در بخش توزیع‌های گسسته دیدیم که تعداد وقایعی که در یک فاصله زمانی یا مکانی رخ می‌دهند، متغیر تصادفی پواسون است. فاصله زمانی بین دو رخداد پواسون نیز خود متغیری تصادفی است که آن را متغیر تصادفی نمایی می‌گوییم. همچنین زمان انتظار تا وقوع اولین رخداد پواسون نیز متغیر تصادفی نمایی می‌باشد.

به طور کلی اگر λ متوسط تعداد اتفاقات در توزیع پواسن باشد $\frac{1}{\lambda}$ مدت زمان لازم برای وقوع اولین اتفاق یا دو اتفاق متوالی است که با β نشان داده می‌شود. یعنی : $\beta = \frac{1}{\lambda}$

x : مدت زمان لازم برای وقوع اولین اتفاق یا مدت زمان لازم برای وقوع دو اتفاق متوالی .

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} ; 0 \le x < \infty$$

$$E(x) = \beta = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \beta^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - \beta t}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته : λ برابر متوسط تعداد اتفاقات در واحد زمانی است.

مثال۱: به طور متوسط در هر ساعت 6 نفر وارد فروشگاهی می‌شوند، پس:

$$\lambda = 6 \text{ برای یک ساعت} \Rightarrow \beta = \frac{\text{یک ساعت}}{6} = 10 \text{ دقیقه}$$

مدت زمان لازم برای ورود اولین مشتری یا ورود مشتری بعدی : دقیقه $\beta = 10$

مثال۲: توزیع ورود مشتریان به فروشگاهی دارای توزیع نمایی با میانگین 3 دقیقه است. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن‌که فروشنده حداقل 5 دقیقه منتظر بماند تا اولین مشتری وارد شود؟

روش اول: توزیع نمایی

$\beta = 3$ دقیقه $\Rightarrow E[x] = \lambda = \frac{1}{3}$ (نفر در دقیقه)

$p(x \geq 5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} dx = -e^{\frac{-x}{3}} \Big|_5^{\infty} = e^{-\frac{5}{3}}$ (برای 5 دقیقه محاسبه شده است)

روش دوم: توزیع پواسن

احتمال آن‌که فروشنده حداقل 5 دقیقه منتظر بماند معادل این احتمال است که در 5 دقیقه هیچ مشتری وارد نشود.

$P(x = 0) = \frac{e^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{5}{3}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{5}{3}}$ (برای 5 دقیقه محاسبه شده است)

$\lambda = \frac{1}{3}$ در یک دقیقه $\Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$ در 5 دقیقه

مثال۳: در مثال فوق فروشنده 5 ساعت منتظر مانده است محاسبه احتمال آن‌که 5 دقیقه دیگر نیز منتظر بماند؟

حل : از آن‌جایی که توزیع نمایی حافظه ندارد جواب همان مقدار بدست آمده برای مثال فوق می‌باشد.

مثال۴: فرض کنید زمان بین ورود هر دو مشتری به یک فروشگاه به صف صندوق دارای توزیع (پخش) نمایی با میانگین $\frac{1}{3}$ دقیقه است. در این صورت، احتمال آن‌که در 2 دقیقه 3 نفر وارد صف صندوق شوند چقدر است؟

۱) $\frac{6^3}{e^6}$ ۲) $\frac{6^2}{e^6}$ ۳) $\frac{2^6}{e^6}$ ۴) $\frac{3^6}{e^6}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$\beta = \frac{1}{3}$ دقیقه $\Rightarrow \lambda = 3$ نفر در دقیقه $\Rightarrow \lambda = 6$ نفر در دو دقیقه

$p(x = 3) = \frac{e^{-6} 6^3}{3!} = 36e^{-6} = \frac{6^2}{e^6}$

مثال۵: توزیع زمان منتهی به سوختن نوعی لامپ نمایی با میانگین 3 سال است. اگر شرکت سازنده آن‌ها را برای اولین سال استفاده بیمه کند، برای چند درصد لامپ‌ها باید خسارت بپردازد؟ (حسابداری ۸۲)

۱) % 4.98 ۲) % 28.3 ۳) % 71.7 ۴) % 95.02

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مسائل توزیع نمایی هم با روش نمایی و هم با روش پواسن قابل حل هستند. اگر شرکت سازنده بخواهد برای اولین سال خسارت بپردازد:

$\beta = 3$ سال $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ سوختن در سال

الف) در توزیع نمایی باید احتمال این را حساب کنیم که کمتر از یک سال لامپ عمر کند. $p(x \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{3}}$

یا

ب) در توزیع پواسن این احتمال را محاسبه کنیم که در یک سال حداقل یک لامپ بسوزد. $P(x \ge 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{3}^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{1}{3}}$

جواب حالت‌های (الف) و (ب) باید یکسان باشد.

○ خاصیت عدم حافظه

توزیع نمائی دارای خاصیت عدم حافظه است، این به آن مفهوم است که اگر متغیر تصادفی x تا زمان n اتفاق نیفتاده باشد، وقوع آن بعد از m واحد زمانی دیگر مستقل از n بوده و ربطی به آن ندارد به عبارت بهتر:

$$\boxed{p(x > m + n \mid x > n) = p(x > m)}$$

یکی از کاربردهای توزیع نمائی با استفاده از خاصیت عدم حافظه در محاسبه طول عمر قطعات برقی می‌باشد چرا که قطعات برقی هر قطعه هر مقدار زمان که کار کرده باشد در هر لحظه می‌تواند سالم یا خراب شود.

مثال: زمان انتظار فروشنده برای مشتریان نمائی با میانگین 3 ساعت است اگر فروشنده 5 ساعت منتظر مانده باشد، احتمال آن‌که تا 1 ساعت دیگر هم مشتری وارد نشود چقدر است؟

$$\begin{cases} p(x > 1 + 5 \mid x > 5) = p(x > 1) = \int_1^\infty \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{3}x}\right]_1^\infty = e^{-\frac{1}{3}} \\ \beta = 3 \ , \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۳ ـ توزیع گاما:

اگر r توزیع نمائی را به صورت مستقل در نظر بگیریم . آنگاه به توزیع گاما می‌رسیم:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \quad ; 0 \le x < \infty$$

$$E(x) = \frac{r}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

$$M_x(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

اگر $r = 1$ قرار دهیم دقیقاً به توزیع نمائی می‌رسیم .

مثال: کمیت تصادفی X بر طبق قانون گاما با پارامترهای α و β توزیع می‌شود. تابع چگالی احتمال‌های آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۲)

۱) $\frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(x-\alpha)^2}{2\beta^2}}$

۲) $\frac{\beta}{\pi\left[\beta^2+(x-\alpha)^2\right]}$

۳) $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$

۴) $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۴ـ توزیع نرمال

توزیع نرمال یا توزیع زنگی (بهنجار) به عنوان یک توزیع متقارن مهمترین توزیع پیوسته بوده و دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف از جمله موارد زیر می‌باشد:

۱) بسیاری از پدیده‌های طبیعی دارای توزیع نرمال هستند.

۲) بسیاری از توزیع‌ها در شکل حدی دارای تقریب نرمال هستند (دوجمله‌ای ـ پواسن ـ کای دو)

تعریف: در صورتیکه متغیر تصادفی پیوسته x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، تابع چگالی و مشخصات آن به شرح زیر است:

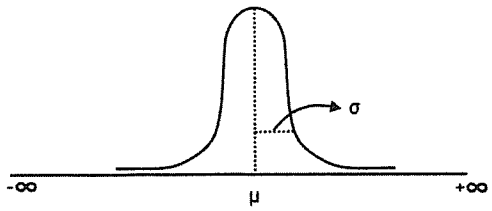
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

در صورتیکه متغیر تصادفی x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 از شکل نمادین زیر برای معرفی آن استفاده می‌شود.

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

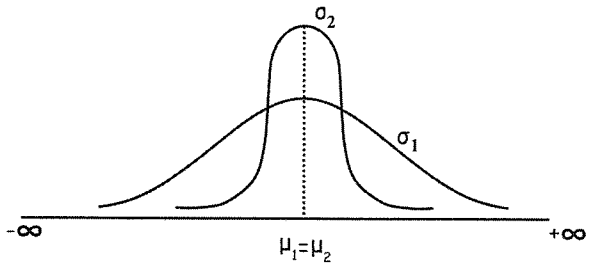
○ تأثیرات μ , σ^2 روی منحنی نرمال

در صورت معلوم بودن پارامترهای μ , σ^2 به راحتی می‌توانیم توزیع را مشخص و منحنی آن را ترسیم کنیم، وضعیت‌های زیر تأثیرات μ , σ^2 را روی منحنی نرمال نشان می‌دهند.

در صورتیکه دو منحنی نرمال به فرم $N\left(\mu_1 , \sigma_1^2\right)$ و $N\left(\mu_2 , \sigma_2^2\right)$ را در نظر بگیریم.

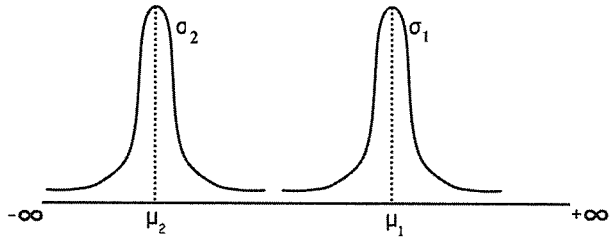
الف) $\sigma_1 > \sigma_2 \quad , \quad \mu_1 = \mu_2$

(میانگین‌ها برابر و انحراف معیارها متفاوت)



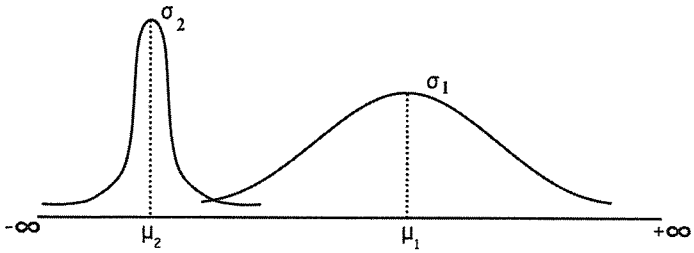
ب) $\sigma_1 = \sigma_2 \quad , \quad \mu_1 > \mu_2$

(میانگین‌ها متفاوت و انحراف معیارها برابر)



ج) $\sigma_1 > \sigma_2 \quad , \quad \mu_1 > \mu_2$

(میانگین‌ها متفاوت و انحراف معیارها متفاوت)



نتیجه‌گیری:

۱) افزایش میانگین منحنی را به سمت راست انتقال می‌دهد.

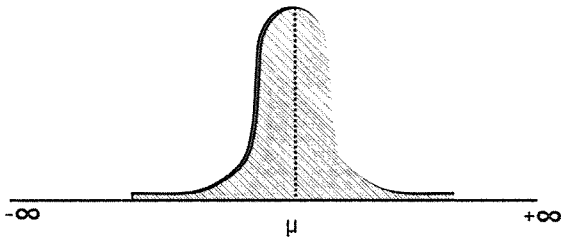
۲) افزایش انحراف معیار، ارتفاع منحنی را کوتاه‌تر می‌کند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

❍ خصوصیات توزیع نرمال

۱ـ سطح زیر منحنی نرمال باتوجه به تعریف تابع چگالی پیوسته برابر 1 است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$



۲ـ پارامترهای میانگین (μ)، میانه (Md) و مد (نما ـ Mo) در توزیع نرمال با هم برابر هستند.

$$\mu = Md = Mo$$

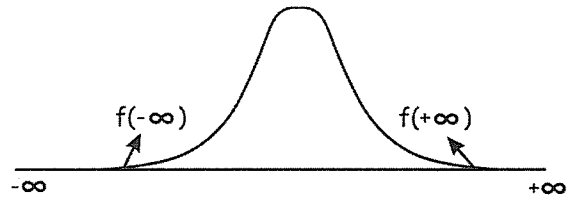
۳ـ باتوجه به برابری $\mu = Mo$ حداکثر مقدار تابع در نقطه $x = \mu$ به‌دست می‌آید، به عبارت بهتر:

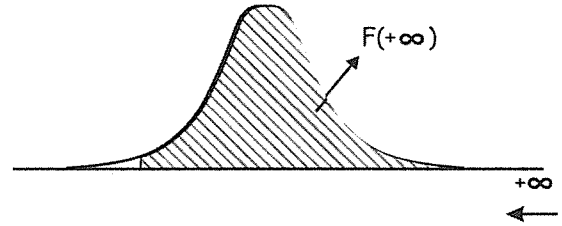
$$f'_X(\mu) = 0$$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

۴ـ در منحنی توزیع نرمال با فاصله گرفتن از میانگین (μ) در هر دو سمت منحنی به محور xها نزدیک می‌شویم به طوری‌که:

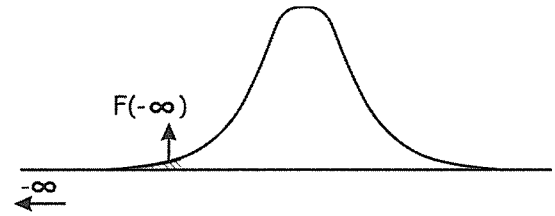
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$





$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = P(X \le x) = 1$$

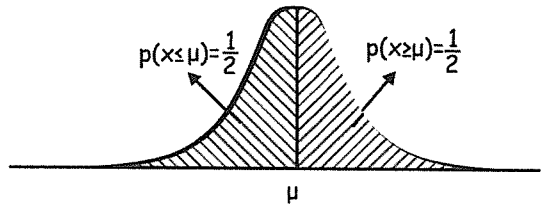
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = P(X \le x) = 0$$



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۵ـ خط $x = \mu$ محور تقارن منحنی بوده (با توجه به برابری $Md = \mu$) درنتیجه:

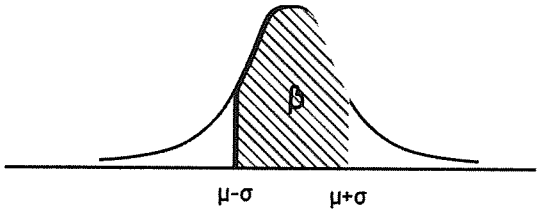
$$\boxed{P(x \le \mu) = P(x \ge \mu) = \frac{1}{2}}$$

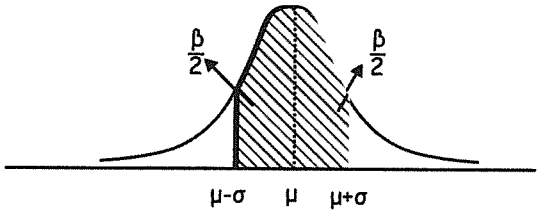


نکته : باتوجه به پیوسته بودن توزیع نرمال $P(x = \mu) = 0$ بنابراین:

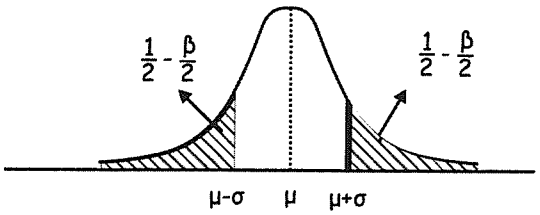
$$P(x \ge \mu) = P(x > \mu) \quad , \quad P(x \le \mu) = P(x < \mu)$$

به ازاء هر نقطه α در صورتیکه $P(\mu - \alpha \le x \le \mu + \alpha) = \beta$ باشد، به علت تقارن منحنی نسبت به خط $x = \mu$ خواهیم داشت:

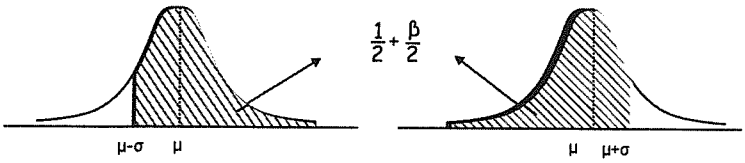




$$P(\mu - \alpha \le x \le \mu) = P(\mu \le x \le \mu + \alpha) = \frac{\beta}{2}$$



$$P(x \le \mu - \alpha) = P(x \ge \mu + \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}$$

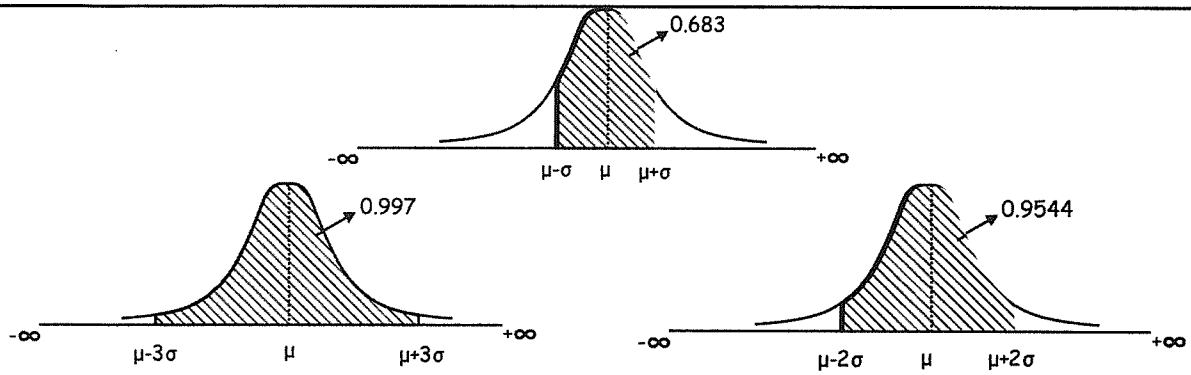


$$P(x \ge \mu - \alpha) = P(x \le \mu + \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۶- در توزیع نرمال اندازه احتمال برای 3 انحراف معیار حول میانگین به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

احتمال در فاصله **1** انحراف معیار (σ) حول میانگین:	$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma)=0.683 \simeq 0.68$
احتمال در فاصله **2** انحراف معیار (2σ) حول میانگین:	$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma)=0.9544 \simeq 0.95$
احتمال در فاصله **3** انحراف معیار (3σ) حول میانگین:	$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma)=0.997$



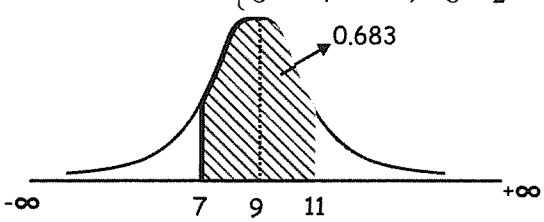
باتوجه به احتمال مربوط به 3 انحراف معیار حول میانگین (0.997) و با در نظر گرفتن این موضوع که سطح کل زیر منحنی نرمال 1 است، می‌توان این طور نتیجه گرفت که:

الف) «احتمال یا سطح زیر منحنی خارج از فاصله $(\mu-3\sigma\,,\,\mu+3\sigma)$ تقریباً برابر 0 است»

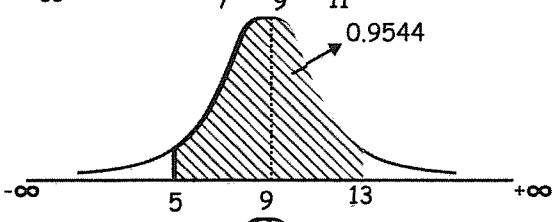
ب) «احتمال یا سطح زیر منحنی در فواصل بیش از 3 انحراف معیار: $(\mu \pm 4\sigma)\,,\,(\mu \pm 5\sigma)\,,\,\ldots$ تقریباً برابر 1 است»

مثال: در توزیع نرمال به فرم $x \sim N(9\,,4)$ دیده می‌شود که:

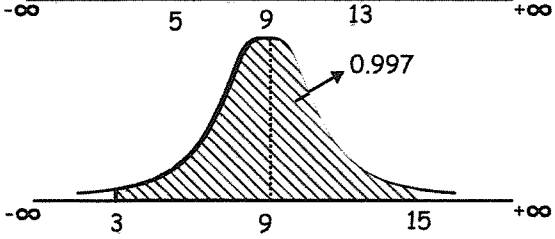
$$x \sim N(9\,,4) \longrightarrow \begin{cases} \mu = 9 \\ \sigma^2 = 4 \longrightarrow \sigma = 2 \end{cases}$$



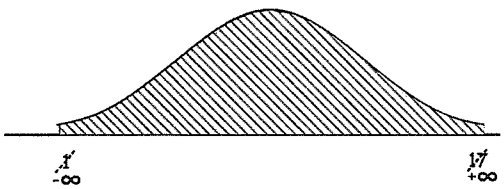
$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma)=P(7 \le x \le 11)=0.683$$



$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma)=P(5 \le x \le 13)=0.9544$$



$$P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma)=P(3 \le x \le 15)=0.997$$



$$P\left(\overset{-\infty}{\cancel{\mu-4\sigma}} \le x \le \overset{+\infty}{\cancel{\mu+4\sigma}}\right)=P\left(\overset{-\infty}{\cancel{1}} \le x \le \overset{+\infty}{\cancel{17}}\right)\simeq 1$$

نتیجه‌گیری:

در توزیع نرمال $N(\mu , \sigma^2)$ همیشه روابط زیر برقرار است:

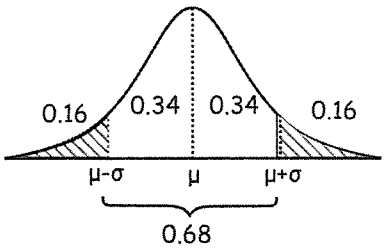
$$\boxed{\begin{array}{l} P(|x-\mu|<\sigma) = 0.683 \simeq 0.68 \\ P(|x-\mu|<2\sigma) = 0.9544 \simeq 0.95 \\ P(|x-\mu|<3\sigma) = 0.997 \\ P(|x-\mu|<4\sigma) \simeq 1 \\ \vdots \end{array}}$$

$$\boxed{P(|x-\mu|<\sigma) = P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)}$$

دقت کنید: باتوجه به نکته ۵ و ۶:

(a

$$P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = 0.683$$



به عبارت بهتر:

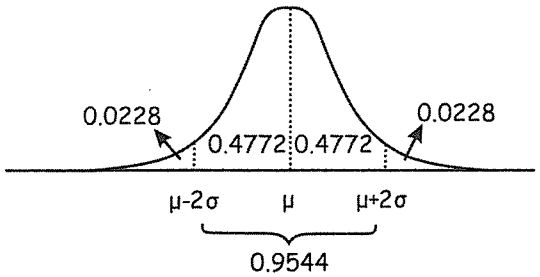
✓ 0.16 داده‌ها در سمت راست $\mu+\sigma$ یا سمت چپ $\mu-\sigma$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(x<\mu-\sigma) = P(x>\mu+\sigma) = 0.16}$

✓ 0.34 داده‌ها در بازه $(\mu , \mu+\sigma)$ یا $(\mu-\sigma , \mu)$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(\mu-\sigma<x<\mu) = P(\mu<x<\mu+\sigma) = 0.34}$

✓ 0.84 داده‌ها در سمت راست $\mu-\sigma$ یا سمت چپ $\mu+\sigma$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(x>\mu-\sigma) = P(x<\mu+\sigma) = 0.84}$

(b

$$P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = 0.9544$$



وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

به عبارت بهتر:

✓ 0.0228 داده‌ها در سمت راست $\mu + 2\sigma$ یا سمت چپ $\mu - 2\sigma$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(x < \mu - 2\sigma) = P(x > \mu + 2\sigma) = 0.0228}$

✓ 0.4772 داده‌ها در بازه $(\mu , \mu + 2\sigma)$ یا $(\mu - 2\sigma , \mu)$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(\mu - 2\sigma < x < \mu) = P(\mu < x < \mu + 2\sigma) = 0.4772}$

✓ 0.9772 داده‌ها در سمت راست $\mu - 2\sigma$ یا سمت چپ $\mu + 2\sigma$ قرار دارند. $\rightarrow$ $\boxed{P(x > \mu - 2\sigma) = P(x < \mu + 2\sigma) = 0.9772}$

۷ـ هرگاه x دارای توزیع نرمال $x \sim N(\mu , \sigma)^2$ باشد، هر ترکیب خطی از آن به صورت $y = bx + a$ باز هم نرمال است، در این وضعیت کافی است امید و واریانس y را محاسبه کنیم.

مثال ۱ : متغیر تصادفی X بر طبق قانون نرمال با امید ریاضی 150 و واریانس 64 توزیع شده است. اگر متغیر تصادفی Y براساس معادله $y = \frac{1}{2}x + 25$ پیروی کند، آنگاه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y عبارتست از: (اقتصاد ۸۳)

۱) $f(y) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-100)^2}{32}}$

۲) $f(y) = \frac{1}{14\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-100)^2}{16}}$

۳) $f(y) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-150)^2}{64}}$

۴) $f(y) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-75)^2}{32}}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} x \sim N\left(\mu_x = 150 , \sigma_x^2 = 64\right) \\ y = \frac{1}{2}x + 25 \rightarrow \begin{cases} E(y) = \frac{1}{2}E(x) + 25 = 100 \rightarrow \mu_y = 100 \\ \sigma^2(y) = \frac{1}{4}\sigma_x^2 = 16 \rightarrow \sigma_y = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ 4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-100}{4}\right)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-100)^2}{32}}$$

مثال ۲ : در صورتیکه $x_1 \sim N(4 , 64)$ و $x_2 \sim N(9 , 36)$ باشد و x_1 و x_2 از هم مستقل باشند توزیع $x_1 \pm x_2$ کدام است؟

باتوجه به آن‌که $\sigma_{x_1}^2 = 64$ و $E(x_1) = 4$ و $\sigma_{x_2}^2 = 36$ و $E(x_2) = 9$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2) = 4 + 9 = 13 \\ \sigma^2(x_1 + x_2) = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 = 64 + 36 = 100 \end{cases}$$

بنابراین $x_1 + x_2 \sim N(13 , 100)$

$$\begin{cases} E(x_1 - x_2) = E(x_1) - E(x_2) = 4 - 9 = -5 \\ \sigma^2(x_1 - x_2) = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 = 64 + 36 = 100 \end{cases}$$

بنابراین $x_1 - x_2 \sim N(-5 , 100)$

مثال ۳ : در صورتیکه $x_1 \sim N(4, 64)$ و $x_2 \sim N(9, 36)$ باشد و x_1 و x_2 مستقل نباشد باتوجه به $\operatorname{cov}(x_1, x_2) = 2$ توزیع $x_1 \pm x_2$ کدام است؟

$$\begin{cases} E(x_1 + x_2) = E(x_1) + E(x_2) = 13 \\ \sigma^2(x_1 + x_2) = \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} + 2\operatorname{cov}(x_1, x_2) = 104 \end{cases} \longrightarrow x_1 + x_2 \sim N(13, 104)$$

$$\begin{cases} E(x_1 - x_2) = E(x_1) - E(x_2) = -5 \\ \sigma^2(x_1 - x_2) = \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} - 2\operatorname{cov}(x_1, x_2) = 96 \end{cases} \longrightarrow x_1 - x_2 \sim N(-5, 96)$$

مثال ۴ : اگر توزیع نمرات دانشجویان در یک کلاس 50 نفری تقریباً نرمال باشد و آنانی که کمتر از $\mu - \sigma$ گرفته‌اند مردود اعلام شوند. حدود چند نفر در این کلاس مردود اعلام خواهند شد؟ (اقتصاد ۸۴)

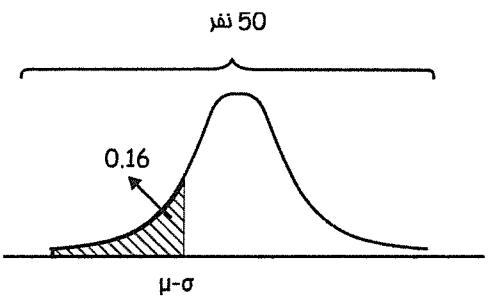
۱) 5 ۲) 8

۳) 12 ۴) 16

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

باتوجه به شکل روبرو و این موضوع که **0.16** دانشجویان کمتر از $\mu - \sigma$ قرار دارند، بنابراین :

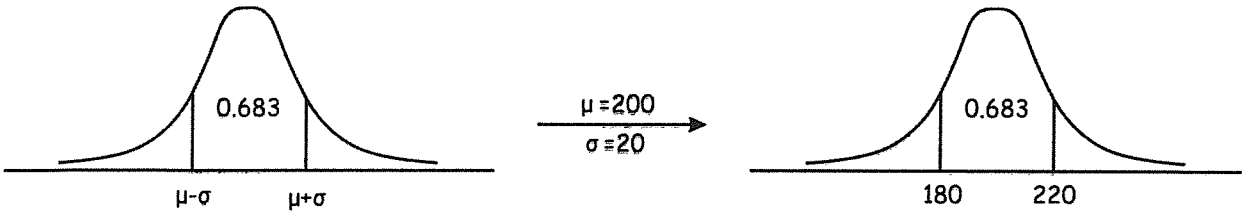
نفر $8 =$ نفر 50×0.16



مثال ۵ : در یک شرکت حقوق کارمندان دارای توزیع نرمال با میانگین حقوق 200 هزار تومان و انحراف معیار 20 هزار تومان می‌باشد، چند درصد دانشجویان بین 180 تا 220 هزار تومان حقوق دریافت می‌کنند؟

۱) 0.16 ۲) 0.32 ۳) 0.68 ۴) 0.84

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\begin{cases} p(180 < x < 220) = p(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) \simeq 0.68 \\ \mu = 200 , \sigma = 20 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ نرمال استاندارد

از آنجائیکه انتگرال‌گیری از تابع چگالی نرمال برای محاسبه احتمال در فاصله محدود غیرممکن است، با استفاده از روش‌های عددی، جدولی به‌دست آمده که مقادیر احتمال مربوط به توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس 1 در آن قابل محاسبه خواهد بود، بنابراین برای محاسبه احتمال در هر توزیع نرمال به فرم $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ابتدا باید توزیع نرمال را به فرم $N(0,1)$ تبدیل کرد، سپس از روی جدول نرمال استاندارد مقدار عددی احتمال را خارج می‌کنیم.

○ تبدیل نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ به نرمال استاندارد $N(0,1)$

با استفاده از تغییر متغیر $\boxed{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$ تابع نرمال $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ به صورت زیر تبدیل به تابع نرمال استاندارد $Z \sim N(0,1)$ خواهد شد:

$$E(z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}\left[E(x) - E(\mu)\right] = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

$$\sigma^2(z) = \sigma^2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma^2_{(x)} + \sigma^2_{(\mu)}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma^2 + 0\right) = 1$$

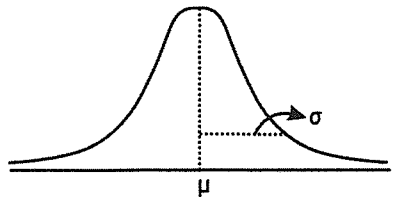
از روابط بالا خواهیم داشت:

$$\boxed{x \sim N(\mu, \sigma^2)} \xrightarrow{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}} \boxed{\begin{array}{l} Z \sim N(0,1) \\ \mu_z = 0,\ \sigma_z^2 = 1 \rightarrow \sigma_z = 1 \end{array}}$$

نرمال

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

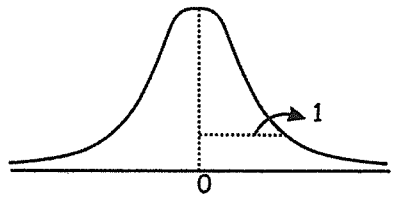


$$\xrightarrow{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

نرمال استاندارد

$$Z \sim N(0,1)$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$



نکات مهم در حل مسائل

نکته ۱:

الف) هر توزیع نرمال به فرم $Z \sim N(0,1)$ با میانگین 0 و واریانس 1 **نرمال استاندارد** گفته می‌شود.

ب) هر توزیع نرمال به فرم $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ با استفاده از تغییر متغیر زیر به فرم **نرمال استاندارد** $Z \sim N(0,1)$ تبدیل می‌شود.

$$\boxed{Z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

مثال: اگر کمیت $X \sim N(50 \text{ و } 9)$ توزیع شده باشد، مقدار x که با استاندارد شده $Z = -1.2$ متناظر باشد، برابر است با:

(مدیریت ۷۸)

۱) 46.4 ۲) 60.8 ۳) 39.2 ۴) 53.6

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = X \sim N(50, 9) \Rightarrow \mu = 50 \ , \ \sigma^2 = 9 \ , \sigma = 3$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1.2 = \frac{X-50}{3} \Rightarrow X = 46.4$$

نکته ۲:

در صورتیکه x_i نقطه دلخواهی از توزیع نرمال به فرم $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ باشد مقدار معادل آن Z_i در توزیع نرمال استاندارد $Z \sim N(0, 1)$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید و بالعکس:

$$\boxed{Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}}$$

مثال ۱: اگراندازه دو نفر از جامعهٔ نرمالی 13 و 19 و اندازهٔ این دو برحسب متغیر استاندارد، صفر و 3 باشد، میانگین و انحراف معیار به ترتیب (از چپ به راست) کدامند؟ (حسابداری ۸۰)

۱) 19 و 2 ۲) 3 و 6 ۳) 2 و 13 ۴) 3 و 19

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{13-\mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = 13 \\ 3 = \frac{19-\mu}{\sigma} \Rightarrow 3\sigma = 6 \Rightarrow \sigma = 2 \end{cases}$$

مثال ۲: عمر لامپ‌های تولید شده دارای توزیع نرمال بوده و 92.5 % آن‌ها بیش از 2160 ساعت کار می‌کنند. همچنین 3.92 % عمری بیش از 17040 ساعت دارند. میانگین و انحراف معیار لامپ‌ها چقدر است؟ ($z_1 = -1.44$ و $z_2 = 1.76$) (حسابداری ۸۱)

۱) $\sigma = 4850$ و $\mu = 8656$ ۲) $\sigma = 4852$ و $\mu = 9840$ ۳) $\sigma = 4621$ و $\mu = 11880$ ۴) $\sigma = 4650$ و $\mu = 8856$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همیشه داریم $Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$:

$$\begin{matrix} P(X > 2160) = 0.925 \\ P(X > 17040) = 0.0392 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -1.44 = \frac{2160-\mu}{\sigma} \\ 1.76 = \frac{17040-\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu - 1.44\,\sigma = 2160 \\ \mu + 1.76\,\sigma = 17040 \end{cases}$$

$$3.2\sigma = 14880 \Rightarrow \sigma = 4650$$

$$\mu = 2160 + (1.44 \times 4650) = 8856$$

مثال۳: در یک توزیع نرمال، 6.94 درصد اقلام زیر 35 و 89.07 درصد اقلام زیر 63 می‌باشند، میانگین و انحراف معیار توزیع به ترتیب (از راست به چپ) عبارتند از: (مدیریت ۷۵)

(راهنمایی: $(Z \mid p = 0.0694) = -1.48$, $(Z \mid p = 0.8907) = 1.23$)

۱) 10.33 و 5.03 ۲) 10.33 و 4.93 ۳) 49.3 و 10.33 ۴) 50.3 و 10.33

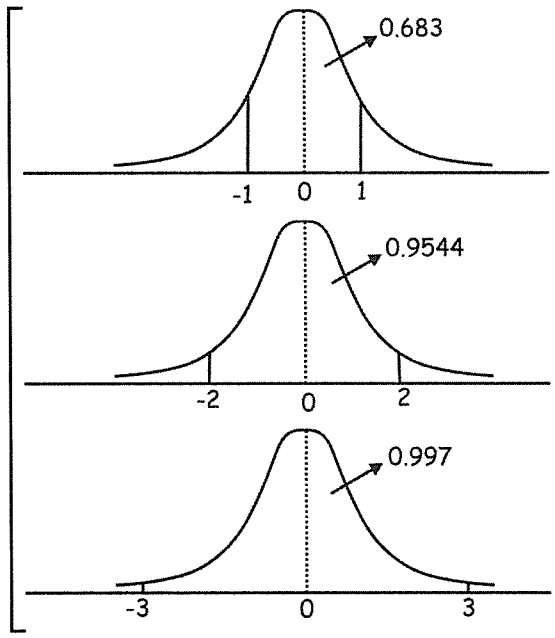
حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

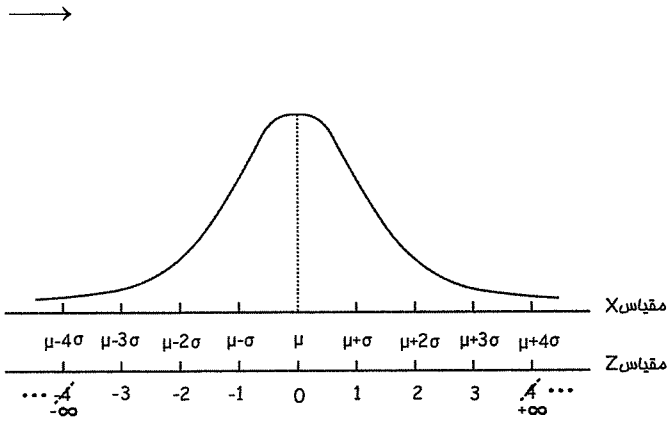
همیشه داریم $Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$:

$$\begin{cases} -1.48 = \frac{35-\mu}{\sigma} \\ 1.23 = \frac{63-\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \mu = 50.3 \ , \sigma = 10.33$$

نکته۳:

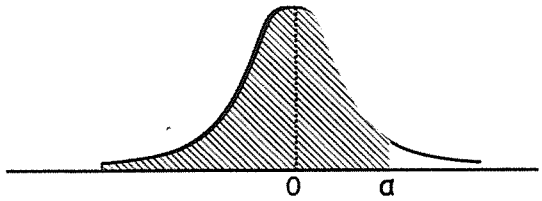
با تبدیل متغیر تصادفی $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ به $Z \sim N(0,1)$ مقیاس به صورت زیر تغییر می‌کند اما مقادیر احتمال در حدود مختلف تغییری نمی‌کند.





نکته۴:

روابط احتمال در نرمال استاندارد با علائم مختلفی به شرح زیر مشخص می‌شود:



$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = P(Z \le \alpha) = \varphi(\alpha) \text{ یا } N(\alpha)$$

در نتیجه برای هر نقطه دلخواه α

$$P(Z \le \alpha) = \varphi(\alpha)$$

$$P(Z > \alpha) = 1 - P(Z \le \alpha) = 1 - \varphi(\alpha)$$

با مراجعه به جدول نرمال استاندارد مقدار $\varphi(\alpha)$ به راحتی به‌دست می‌آید.

نکته۵:

در صورتیکه x دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد برای محاسبه احتمال برای آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} P(x \le \alpha) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) \\ P(x > \alpha) = 1 - P(x \le \alpha) = 1 - \varphi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) \end{cases}$$

مثال: اگر کمیت X برطبق قانون نرمال با امید ریاضی 50 و واریانس 25 توزیع شده باشد، $D(X)=\sigma^2=25$ و $X \sim E(X)=\mu=50$ احتمال این‌که کمیت تصادفی 3 X مقادیری کمتر از 160 اختیار کند، $P(3X < 160)$ برابر است با: (حسابداری ۷۸)

(راهنمایی: φ عبارت است از مقدار متناظر با متغیر استاندارد Z)

۱) $\varphi(0.024)$ ۲) $\varphi(0.133)$ ۳) $\varphi(0.667)$ ۴) $\varphi\left(\frac{273}{3}\right)$

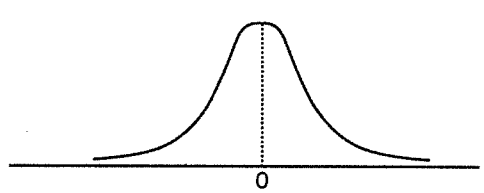
حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$p(3X < 160) = P\left(X < \frac{160}{3}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\frac{160}{3}-50}{5}\right) = P\left(Z < \frac{10}{15}\right) = P\left(Z < \frac{2}{3}\right) = \varphi(0.667)$$

نکته۶:

در صورتیکه $Z \sim N(0,1)$ باشد، به علت تقارن منحنی نسبت به $Z = 0$، احتمال در هر دو سمت این نقطه $\frac{1}{2}$ است، به عبارت بهتر:

$$\boxed{\begin{aligned} &P(Z \le 0) = \varphi(0) = \frac{1}{2} \\ &P(Z \ge 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}} \longrightarrow$$



مثال۱: در صورتی‌که $Z \sim N(0,1)$ استاندارد باشد مقدار $P(-3Z \le 0)$ کدام است؟

$$P(-3Z \le 0) = P\left(\frac{-3Z}{-3} \ge \frac{0}{-3}\right) = P(Z \ge 0) = \frac{1}{2}$$

مثال۲: فرض کنید X، دارای توزیع نرمال با میانگین 4 و انحراف معیار 3 باشد، اگر $Y = X - 3$ باشد، احتمال Y بزرگ‌تر از 1 ، یعنی $P(Y \geq 1)$ کدام است؟ (مدیریت ۷۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) 1

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E(Y) = E(X) - 3 = 4 - 3 = 1$$

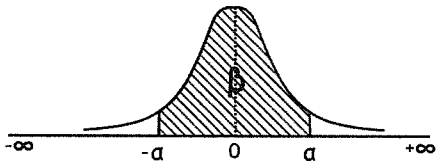
$$\sigma^2(Y) = \sigma^2\left(X - \overset{0}{\cancel{3}}\right) = 9 \quad \Rightarrow \sigma(Y) = 3$$

$$P(Y \geq 1) = P\left(Z \geq \frac{1 - E(y)}{\sigma_Y}\right) = P\left(Z \geq \frac{1-1}{3}\right) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$$

نکته۷:

در صورتیکه $Z \sim N(0,1)$ باشد، به علت تقارن منحنی نسبت به $Z = 0$، روابط زیر باتوجه به شکل زیر برقرار هستند.

$$P(-\alpha < Z < \alpha) = \beta \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P(-\alpha < Z < 0) = P(0 < Z < \alpha) = \frac{\beta}{2} \\ P(Z < -\alpha) = P(Z > \alpha) = \frac{1-\beta}{2} \\ P(Z > -\alpha) = P(Z < \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \end{array}}$$



دقت می‌کنید که روابط بالا به راحتی و باتوجه به تقارن نتیجه گرفته می‌شوند به طور مثال:

$$P(Z > -\alpha) = P(-\alpha < Z < 0) + P(Z > 0) = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}$$

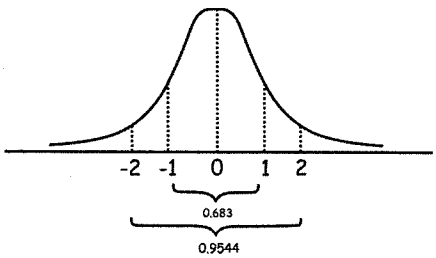
مثال۳: در صورتیکه $Z \sim N(0,1)$ باشد، احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\boxed{P(-1 < Z < 2) = P(-1 < z < 0) + P(0 < Z < 2) = \frac{0.683}{2} + \frac{0.9544}{2}}$$

$$\boxed{P(1 < Z < 2) = P(0 < Z < 2) - P(0 < Z < 1) = \frac{0.9544}{2} - \frac{0.683}{2}}$$

$$\boxed{P(Z > -2) = P(-2 < Z < 0) + P(Z > 0) = \frac{0.9544}{2} + 0.5 = 0.9772}$$

$$\boxed{P(Z < -1) = P(Z > 1) = \frac{1 - 0.683}{2} = 0.16}$$

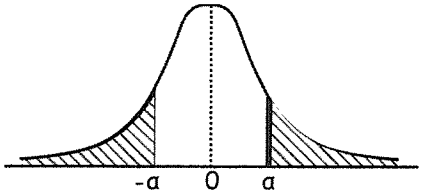


$$\boxed{\begin{array}{l} P(Z < 1) = 1 - P(Z > 1) = 0.84 \\ P(Z < 1) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 1) = 0.5 + \frac{0.683}{2} = 0.84 \end{array}}$$

$$\boxed{P(Z < -2) = P(Z > 2) = \frac{1 - 0.9544}{2} = 0.0228}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته۸:



$$\boxed{\begin{array}{l} P(Z<-\alpha)=P(Z>\alpha) \\ P(Z>-\alpha)=P(Z<\alpha) \end{array}}$$

روابط بالا در مسائلی که نامساوی‌هائی به شکل زیر وجود دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\begin{array}{l} P(Z>A)=P(Z<B) \\ P(Z<A)=P(Z>B) \end{array} \longrightarrow \boxed{A=-B}$$

$$\begin{array}{l} P(Z>A)=P(Z>B) \\ P(Z<A)=P(Z<B) \end{array} \longrightarrow \boxed{A=B}$$

مثال۴: اگر توزیع X نرمال با میانگین 100 و انحراف معیار 10 باشد، و $P(X \le \alpha)=0.0668$ باشد، مقدار α کدام است؟ (مدیریت ۷۷)

(راهنمایی: $\int_{-5}^{1.5} f(z)dz=0.9332$)

۱) 50 ۲) 85 ۳) 115 ۴) 150

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$(1)\, P(X<a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a-100}{10}\right)=P\left(Z<\frac{a-100}{10}\right)=0.0668$$

$$(2)\, \int_{-\infty}^{1.5} f(z)dz=P(z<1.5)=0.9332 \Rightarrow P(z>1.5)=0.0668$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{a-100}{10}=-1.5 \Rightarrow a=85$$

مثال۵: توزیع x نرمال با انحراف معیار 10 می‌باشد.اگر $P(X \ge 100)=0.975$ باشد، مقدار میانگین چقدر است؟ (مدیریت ۸۱)

(راهنمایی: $\int_{1.96}^{4} f(z)dz=0.025$)

۱) 60 ۲) 80.4 ۳) 140 ۴) 119.6

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(1)\quad P(X \ge 100)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\ge\frac{100-\mu}{10}\right)=P\left(Z\ge\frac{100-\mu}{10}\right)=0.975$$

$$(2)\quad \int_{1.96}^{+\infty} f(z)dz=P(Z\ge 1.96)=0.025 \Rightarrow P(Z\le 1.96)=0.975$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{100-\mu}{10}=-1.96 \Rightarrow \mu=119.6$$

مثال۶: توزیع کمیت تصادفی X نرمال بوده و میانگین و انحراف معیار آن به ترتیب 20 و 4 باشد، $P(X \ge 28)$، کدام است؟

(راهنمایی: $P(-2<Z<2)=0.9544$) (حسابداری ۷۸)

۱) 0.0228 ۲) 0.0456 ۳) 0.4772 ۴) 0.9544

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$(1)\quad P(-2 \le z \le 2) = 0.9544 \Rightarrow P(0 \le z \le 2) = \frac{0.9544}{2} = 0.4772 \Rightarrow P(z \ge 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

$$(2)\quad P(X \ge 28) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{28-20}{4}\right) = P(Z \ge 2) = 0.0228$$

مثال۷: میانگین توزیع نمرات دانشجویان یک دانشکده 52 با انحراف معیار 10 می‌باشد. احتمال این‌که نمرهٔ یکی از دانشجویان کمتر از 72 باشد، چقدر است؟ (راهنمایی: $P(Z \le -2) = 0.0228$). (حسابداری ۷۹)

۱) 0.0228 ۲) 0.5 ۳) 0.5793 ۴) 0.9772

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(1) P(z \le -2) = 0.0228 \Rightarrow P(z \ge -2) = 0.9772$$

$$(2) P(x < 72) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{72-52}{10}\right) = P(z < 2)$$

با توجه به آنکه می‌دانیم همیشه $P(z < \alpha) = P(z > -\alpha)$ یا برعکس: $(1), (2) \Rightarrow P(z < 2) = P(z > -2) = 0.9772$

مثال۸: توزیع x نرمال با میانگین 100 و انحراف معیار 10 است. اگر $P(X \ge x) = 0.0228$ باشد. مقدار x چقدر است؟

(راهنمایی: $\int_{-4}^{-2} f(z)dz = 0.0228$) (حسابداری ۸۲)

۱) 60 ۲) 80 ۳) 120 ۴) 140

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$(۱)\quad P(X \ge x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{x-100}{10}\right) = P\left(z \ge \frac{x-100}{10}\right) = 0.0228$$

$$(۲)\quad \int_{\cancel{-4}\,-\infty}^{-2} f(z)dz = P(z \le -2) = 0.0228$$

$$(۱) و (۲)\quad -(-2) = \frac{X-100}{10} \Rightarrow X = 120$$

مثال۹: توزیع متغیر تصادفی X نرمال با میانگین 100 و انحراف معیار 10 است. اگر $P(X \ge x) = 0.0495$ باشد، مقدار x چقدر است؟ (راهنمایی: $\int_{-4}^{-1.65} f(z)dz = 0.0495$)(حسابداری ۸۱)

۱) 60 ۲) 83.5 ۳) 116.5 ۴) 140

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$(1) P(X \ge x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{x-100}{10}\right) = P\left(z \ge \frac{x-100}{10}\right) = 0.0495$$

$$(2)\quad \int_{\cancel{-4}\,-\infty}^{-1.65} f(z)dz = \int_{-\infty}^{-1.65} f(z)dz = P(z < -1.65) = 0.0495$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{10} = -(-1.65) \Rightarrow x = 116.5$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ تقریب توزیع‌ها به وسیله توزیع نرمال

۱ـ تقریب توزیع پواسن به توزیع نرمال:

هرگاه میانگین توزیع پواسن (λ) به حدی بزرگ شود که $\lambda \geq 10$ باشد، آنگاه توزیع نرمال تقریب مناسبی برای توزیع پواسن خواهد بود، به طوری‌که:

توزیع پواسن		نرمال $x \sim$
$x \sim$		
$\mu_x = \lambda$	$\xrightarrow{\lambda \geq 10}$	$\mu_x = \lambda$
$\sigma_x^2 = \lambda$		$\sigma_x^2 = \lambda \rightarrow \sigma_x = \sqrt{\lambda}$

در عین حال برای تبدیل توزیع نرمال به نرمال استاندارد با استفاده از رابطهٔ $Z = \dfrac{x - \mu_x}{\sigma_x}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{Z = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}$$

مثال: در یک توزیع پواسن با $\lambda = 36$ تقریب توزیع نرمال را در نظر می‌گیریم، عدد متناظر Z برای داده $x = 45$ کدام است؟ (مدیریت ۸۵)

۱) 1.2 ۲) 1.25 ۳) 1.5 ۴) 1.75

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$Z = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{45 - 36}{\sqrt{36}} = 1.5$$

۲ـ تقریب توزیع دوجمله‌ای به توزیع نرمال:

در یک توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای p , n (n تعداد آزمایشات و p احتمال موفقیت) در صورتیکه یکی از شرایط زیر برقرار باشد، توزیع نرمال با $\mu = np$ و $\sigma^2 = npq$ تقریب خوبی برای توزیع دوجمله‌ای خواهد بود.

(a

دو جمله‌ای $Bin(n , p)$		نرمال $N(\mu , \sigma^2)$
$x \sim$	$\xrightarrow{np > 5 , nq > 5}$	$x \sim$
$\mu = np$	**np و nq** هرچه بیشتر از **5**	$\mu = np$
$\sigma^2 = npq$	باشند تقریب بهتر است.	$\sigma^2 = npq$

(b

دوجمله‌ای $Bin(n , p)$		نرمال $N(\mu , \sigma^2)$
$x \sim$	برای **n**های کوچک	$x \sim$
$\mu = np$	$p \simeq 0.5$	$\mu = np$
$\sigma^2 = npq$	$\longrightarrow$	$\sigma^2 = npq$

در شرایط مساوی تقریب (a) از تقریب (b) قوی‌تر و بهتر می‌باشد.

مثال: مدت زمانی که دانشجویان صرف پاسخگوئی به سؤالات یک آزمون خاص می‌کنند دارای توزیع نرمال با میانگین 60 دقیقه و انحراف معیار 10 دقیقه است. اگر 100 دانشجو در این آزمون شرکت کرده باشند، احتمال این‌که حداقل 55 نفر بیشتر از 60 دقیقه وقت صرف آزمون کرده باشند چقدر است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) 0.34 ۲) 0.45 ۳) 0.16 ۴) 0.55

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

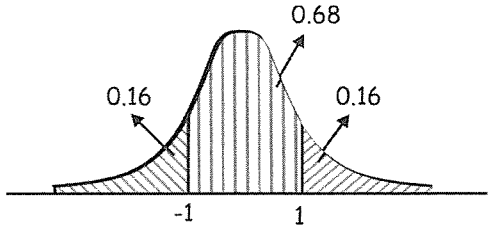
باتوجه به آن‌که زمات پاسخگوئی به سؤالات توزیع نرمال با $\mu = 60$ و $\sigma = 10$ است خواهیم داشت:

$$p = p(x > 60) = \frac{1}{2}$$

در عین حال تعداد دانشجویانی که از 100 دانشجو بیشتر از 60 دقیقه وقت صرف می‌کند دارای توزیع دوجمله‌ای به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} Bin(n = 100 , p = 0.5) \\ y \sim \text{دوجمله‌ای} \\ \mu = np = 50 \\ \sigma^2 = npq = 25 \end{cases} \xrightarrow[nq = 50 > 5]{np = 50 > 5} \begin{cases} y \sim N(\mu = 50 , \sigma^2 = 25) \\ \mu = 50 \\ \sigma^2 = 25 \rightarrow \sigma = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(y > 55) = P\left(\frac{y-\mu}{\sigma} > \frac{55-\mu}{\sigma}\right) = P(z > 1) = 0.16 \\ Z = \frac{y-\mu}{\sigma} \end{cases}$$



یادآوری:

باتوجه به نکته۵ در خصوصیات توزیع نرمال $P(x > \mu) = P(x \le \mu) = 0.5$ است.

نکته: هرگاه تصحیح پیوستگی (که برای تبدیل توزیع گسسته به پیوسته استفاده می‌شود.) در صورت سؤال خواسته شد به طریق روبرو عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} p(a < x < b) \longrightarrow p(a - 0.5 < x < a + 0.5) \\ p(x < a) \longrightarrow p(x < a + 0.5) \\ p(x > a) \longrightarrow p(x > a - 0.5) \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ توزیع‌های نتیجه‌گیری شده از نرمال

۱) توزیع $\chi^2_{(n)}$ (کای اسکور ـ خی دو ـ کای دو)

الف) در صورتیکه $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ و $Z \sim N(0,1)$ باشد آنگاه $Z^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ دارای توزیع کای اسکور با 1 درجه آزادی است به عبارت بهتر:

$$\boxed{Z^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}}$$

ب) در صورتیکه $\begin{cases} x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$ و $\begin{cases} Z_i \sim N(0,1) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$ آنگاه $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$ دارای توزیع کای اسکور با n درجه آزادی می‌باشند، به عبارت بهتر:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}}$$

۲) توزیع $t_{(n)}$ (استیودنت)

در صورتیکه $Z \sim N(0,1)$ و توزیع $\chi^2_{(n)}$ کای اسکور با n درجه آزادی در نظر گرفته شود آنگاه:

$$\boxed{t_{(n)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}}$$

توزیع t استیودنت با n درجه آزادی خواهد بود.

۳) توزیع $F_{m,n}$ (فیشر):

در صورتیکه $\chi^2_{(m)}$ (کای دو با m درجه آزادی) و $\chi^2_{(n)}$ (کای دو با n درجه آزادی) در نظر گرفته شود آنگاه:

$$\boxed{F_{m,n} = \frac{\frac{\chi^2_{(m)}}{m}}{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}$$

توزیع فیشر با m , n درجه آزادی خواهد بود.

مثال ۱ : اگر Z_1, Z_2, Z_3 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، توزیع $\sum_{i=1}^{3} Z_i^2$ کدام است؟

$\sum_{i=1}^{3} Z_i^2 \sim \chi^2_{(3)}$ (کای دو با 3 درجه آزادی)

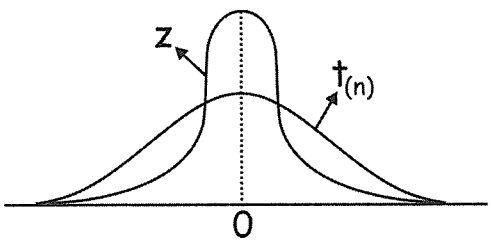
مثال ۲ : توزیع $F_{1,n}$ (فیشر با 1 , n درجه آزادی) با کدام توزیع برابر است؟

$$F_{1,n} = \frac{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}} = \frac{\frac{Z^2}{1}}{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}} = \left(\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}\right)^2 = t^2_{(n)}$$

بنابراین توزیع $F_{1,n}$ همان مجذور توزیع $t_{(n)}$ می‌باشد.

❍ مشخصات توزیع $t_{(n)}$ (استیودنت)

۱ـ مانند توزیع نرمال متقارن است اما ارتفاع آن کوتاه‌تر و در نتیجه پراکندگی در توزیع t بیشتر از توزیع نرمال خواهد بود.



۲ـ در صورتیکه متغیر تصادفی x دارای توزیع t با درجه آزادی n باشد امید و واریانس آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

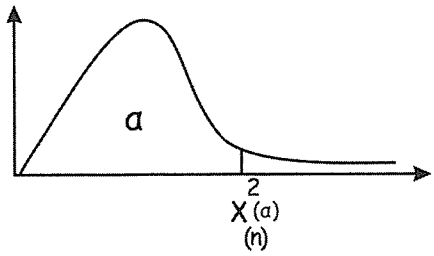
$$\boxed{\begin{aligned} &E(x) = 0 \\ &\sigma^2(x) = \frac{n}{n-2} \end{aligned}}$$

۳ـ با افزایش درجه آزادی (n) و در نتیجه تعداد نمونه مستقل، توزیع $t_{(n)}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

$$\boxed{t_{(n)} \xrightarrow{\text{افزایش } \mathbf{n}} Z \sim N(0,1)}$$

❍ مشخصات توزیع $\chi^2_{(n)}$ (کای اسکور با n درجه آزادی)

۱ـ توزیعی نامتقارن است و مقادیر $\chi^2_{(n)}$ همگی مثبت $\left(\chi^2_{(n)} > 0\right)$ هستند.



۲ـ در صورتیکه متغیر تصادفی x دارای توزیع $\chi^2_{(n)}$ (کای‌دو با n درجه آزادی) باشد، امید و واریانس آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\begin{aligned} &E(x) = n \ \text{(درجه آزادی)} \\ &\sigma^2(x) = 2n \ \text{(2 برابر درجه آزادی)} \end{aligned}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۳ـ با افزایش درجه آزادی (n) توزیع $\chi^2_{(n)}$ به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

$$\chi^2_{(n)} \xrightarrow{\text{افزایش } n} Z \sim N(0,1)$$

۴ـ در صورتیکه کمیت‌های مستقل x , y دارای توزیع χ^2 به ترتیب با m , n درجه آزادی باشند آنگاه $x + y$ دارای توزیع χ^2 با $m + n$ درجه آزادی خواهد بود، به عبارت بهتر:

$$\begin{matrix} x \sim \chi^2_{(m)} \\ y \sim \chi^2_{(n)} \end{matrix} \xrightarrow{m,n>0} x + y \sim \chi^2_{(m+n)}$$

مثال: در صورتیکه کمیت‌های مستقل x , y بر طبق توزیع چی‌دو (کای دو) با واریانس‌های 16 , 10 باشند کمیت $x + y$ دارای چه توزیعی خواهد بود؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) نرمال با واریانس $4 + \sqrt{5}$ ۲) χ^2 با 26 درجه آزادی ۳) نرمال با واریانس 16 ۴) χ^2 با 13 درجه آزادی

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

درجه آزادی

$\sigma^2_{(x)} = 2m = 16 \rightarrow m = 8$

درجه آزادی

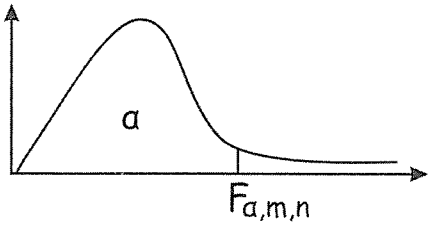
$\sigma^2_{(y)} = 2n = 10 \rightarrow n = 5$

$$\rightarrow x + y \sim \chi^2_{m+n} = \chi^2_{13}$$

❍ مشخصات توزیع $F_{m,n}$ (فیشر با m , n درجه آزادی)

۱ـ توزیعی نامتقارن است و مقادیر $F_{m,n}$ همگی مثبت هستند. $(F_{m,n})$

۲ـ رابطه زیر با توجه به شکل مطرح است:



$$F_{\alpha,m,n} = \frac{1}{F_{1-\alpha,n,m}}$$

مثال: در صورتیکه $F_{0.975,4,3} = 1.5$ و $F_{0.975,3,4} = 0.5$ باشد، مقدار $F_{0.025,4,3}$ کدام است؟

$$F_{0.025,4,3} = \frac{1}{F_{0.975,3,4}} = \frac{1}{0.5} = 2$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل پنجم

نمونه‌گیری و برآورد

❍ نظریه نمونه‌ها و توزیع نمونه‌ای

● **نمونه تصادفی:** نمونه تصادفی به نمونه‌ای می‌گویند که افراد تشکیل دهنده آن دارای خصوصیات افراد جامعه اصلی باشند.

نکته : تنها در انتخاب تصادفی، تمام افراد جامعه از شانس مساوی برای انتخاب شدن برخوردار هستند.

● **آماره:** اصطلاحی که در مورد نمونه استفاده می‌شود، و خصوصیتی از آن را بررسی می‌کنند مانند: میانگین نمونه $(\bar{x})$، واریانس نمونه (S^2)، نسبت نمونه $(\bar{P})$.

● **پارامتر:** پارامتر عددی است که خصوصیتی از یک جامعه را بیان می‌کند، مانند: میانگین جامعه (μ)، واریانس جامعه (σ^2)، میانه جامعه (Md)، ....

نکته:

۱) پارامترها در جامعه ثابت هستند ولی مجهول و باید آن‌ها را از طریق آماره‌ها در نمونه‌گیری تخمین بزنیم.

۲) هر آماره یک متغیر تصادفی است چون از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کند

مثال: $\bar{X}$ به عنوان برآورد کننده‌ای از μ (اقتصاد ۷۰)

۱) یک متغیر تصادفی است اگر که μ متغیر تصادفی باشد.

۲) یک متغیر تصادفی است درحالیکه μ ثابت است.

۳) یک کمیت ثابت است در حالیکه μ متغیر باشد.

۴) یک کمیت ثابت است و μ معین ثابت است.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

پارامترها و آماره‌های مهم:

شاخص	گروه	نماد کلی	میانگین	واریانس	نسبت
آماره	نمونه	$\hat{\theta}$	$\bar{x}$	S^2	$\bar{P}$
پارامتر	جامعه	θ	μ	σ^2	P

❍ توزیع میانگین نمونه $(\bar{x})$

● میانگین و واریانس جامعه

در صورتیکه جامعه به حجم N وجود داشته باشد، میانگین (μ) و واریانس جامعه (σ^2) به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}}$$

● میانگین و واریانس نمونه

در صورتیکه نمونه مستقل n تائی $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ_x^2 انتخاب شود، میانگین نمونه $(\bar{X})$ و واریانس نمونه (S^2) به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

❍ میانگین و واریانس مربوط به $\bar{X}$ (میانگین نمونه)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{E(\overset{\mu}{\cancel{x_1}}) + E(\overset{\mu}{\cancel{x_2}}) + \dots + E(\overset{\mu}{\cancel{x_n}})}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\sigma^2_{(\bar{x})} = Var(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{\overset{\sigma_x^2}{\cancel{\sigma^2_{x_1}}} + \overset{\sigma_x^2}{\cancel{\sigma^2_{x_2}}} + \dots + \overset{\sigma_x^2}{\cancel{\sigma^2_{x_n}}}}{n^2} = \frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

به عبارت بهتر:

$E(\bar{x}) = \mu$	امید میانگین نمونه همان میانگین جامعه است.
$\sigma^2_{(\bar{x})} = Var(\bar{x}) = \frac{\sigma_x^2}{n}$	واریانس میانگین نمونه برابر است با حاصل تقسیم واریانس جامعه بر n
$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	انحراف معیار میانگین نمونه برابر است با حاصل تقسیم انحراف معیار جامعه بر $\sqrt{n}$

نکته : در شرایطی که نمونه nتائی از جامعه محدود Nتائی بدون جایگذاری انتخاب شود و $\frac{n}{N} < 0.05$ باشد:

$$\boxed{\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1} \times \frac{\sigma_x^2}{n}}$$

که $\frac{N-n}{N-1}$ در آن ضریب تصحیح می‌باشد.

نکته : باتوجه به رابطه $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ دیده می‌شود که زمانی انحراف معیار میانگین نمونه $(\sigma_{\bar{x}})$ کاهش پیدا می‌کند که n تعداد نمونه افزایش پیدا کند و بالعکس.

مثال۱: انحراف معیار جامعه‌ای 20 و انحراف معیار توزیع میانگین نمونه‌ای nتائی 2 است. n چقدر است ؟ (مدیریت ۸۱)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{20}{\sqrt{n}} \rightarrow n = 100$$

مثال۲: توزیع میانگین نمونه یک جامعه نامحدود با میانگین 10 و انحراف معیار 2 دارای واریانس 1 است، تعداد نمونه n کدام است؟ (مدیریت ۷۴)

۱) 4 ۲) 10 ۳) 16 ۴) 33

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x = 2 & \mu = 10 \\ \sigma_{\bar{x}}^2 = 1 \Rightarrow & \sigma_{\bar{x}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 4$$

مثال۳: اگر بخواهیم انحراف معیار میانگین نمونه‌ای $(\sigma_{\bar{x}})$ براساس حجم نمونه $n = 64$ تائی از جامعه‌ای که دارای انحراف معیار 6 است به نصف کاهش یابد، حجم نمونه باید چند تا شود؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 128 ۲) 182 ۳) 256 ۴) 320

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

برای نصف کردن $\sigma_{\bar{x}}$ باید n را 4 برابر کنیم. زیرا:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

بنابراین $n = 256$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ توزیع $\bar{x}$ (میانگین نمونه) در شرایط مختلف

در صورتی‌که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نمونه مستقل n تائی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد.

۱ـ جامعه نرمال، واریانس جامعه (σ^2) معلوم

توزیع $\bar{x}$ در این شرایط مستقل از حجم n (تعداد نمونه) بوده و برای هر تعداد از آن $(n \geq 1)$ همیشه نرمال است.

تعداد نمونه	توزیع $\bar{x}$	میانگین $\bar{x}$	واریانس $\bar{x}$	انحراف معیار $\bar{x}$	متغیر استاندارد
$n \geq 1$ (دلخواه)	نرمال	$E(\bar{x}) = \mu$	$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$

۲ـ جامعه نرمال، واریانس جامعه (σ^2) نامعلوم

توزیع $\bar{x}$ در این وضعیت وابسته به حجم n (تعداد نمونه) است، در شرایطی که $n > 30$ باشد، توزیع $\bar{x}$ نرمال و در شرایطی که $n \leq 30$ توزیع آن $t_{(n-1)}$ با $(n-1$ درجه آزادی) خواهد بود.

تعداد نمونه	توزیع $\bar{x}$	میانگین $\bar{x}$	واریانس $\bar{x}$	انحراف معیار $\bar{x}$	متغیر استاندارد
$n > 30$ (نمونه بزرگ)	نرمال	$E(\bar{x}) = \mu$	$s^2_{\bar{x}} = \frac{s^2_x}{n}$	$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$
$n \leq 30$ (نمونه کوچک)	$t_{(n-1)}$	$E(\bar{x}) = \mu$	$s^2_{\bar{x}} = \frac{s^2_x}{n}$	$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$	$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s_x}{\sqrt{n}}}$

۳ـ جامعه دلخواه (نامعلوم)، واریانس جامعه (σ^2) معلوم

توزیع $\bar{x}$ در این شرایط وابسته به حجم n (تعداد نمونه) بوده و به دو شکل زیر بررسی می‌شود:

الف) $n > 30$ (حجم نمونه زیاد)

توزیع $\bar{x}$ در این وضعیت با توجه به قضیه حد مرکزی نرمال خواهد بود.

تعداد نمونه	توزیع $\bar{x}$	میانگین $\bar{x}$	واریانس $\bar{x}$	انحراف معیار $\bar{x}$	متغیر استاندارد
$n > 30$ (نمونه بزرگ)	نرمال (قضیه حد مرکزی)	$E(\bar{x}) = \mu$	$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2_x}{n}$	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

• قضیه حد مرکزی:

اگر یک نمونه تصادفی مستقل n تائی از جامعه‌ای دلخواه (غیرنرمال) با میانگین μ و واریانس σ^2 انتخاب شود، در شرایطی که n (تعداد نمونه) بزرگ شود $(n > 30)$، توزیع $\bar{x}$ (میانگین نمونه) تقریباً نرمال خواهد بود و :

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu_x \\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma_x^2}{n} \\ \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \end{cases} \longrightarrow z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ب) $n \le 30$ (حجم نمونه کوچک)

توزیع $\bar{x}$ در این وضعیت نامعلوم بوده و به کمک قضیه چی‌بی‌شف میانگین جامعه (μ) را تخمین می‌زنیم.

○ چی‌بی‌شف

• قانون اعداد بزرگ

با استفاده از قوانین اعداد بزرگ امکان پیش‌بینی نتایج حاصل از آزمایش‌های آماری از روی قوانین احتمالاتی فراهم می‌شود.

قضایای چبیشف از جمله قوانین اعداد بزرگ هستند که برای محاسبه احتمال در مورد توزیع‌های نامعلوم مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این‌گونه توزیع‌ها اطلاعاتی در مورد میانگین (μ) و انحراف معیار (σ) داده می‌شود.

• لم چبیشف:

احتمال آن‌که متغیر تصادفی نامنفی x حداقل برابر مقدار α باشد، حداکثر برابر $\frac{E(x)}{\alpha}$ خواهد بود:

$$\boxed{P(x \ge \alpha) \le \frac{E(x)}{\alpha}}$$ ؛ $E(x)$: امید ریاضی

یا احتمال آن‌که متغیر تصادفی نامنفی x از مقدار α کمتر باشد، بیشتر از $1 - \frac{E(x)}{\alpha}$ خواهد بود:

$$\boxed{P(x < \alpha) > 1 - \frac{E(x)}{\alpha}}$$

• قضیه اول چبیشف:

احتمال آن‌که قدرمطلق تفاضل متغیر تصادفی نامنفی x از میانگین $(\mu = E(x))$ بزرگتر یا مساوی از مقدار کوچک مثبت ε باشد، حداکثر برابر $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ می‌باشد به عبارت بهتر:

$$\boxed{P(|x - \mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$ رابطه (I)

یا احتمال آن‌که قدرمطلق تفاضل متغیر تصادفی x از میانگین $(\mu = E(x))$ کوچکتر از مقدار کوچک مثبت ε باشد، حداقل برابر $1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ می‌باشد به عبارت بهتر:

رابطه (II)

$$\boxed{P(|x-\mu|<\varepsilon) > 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

نکته ۱ : رابطه (II) بیشتر در مسائل به‌کار برده می‌شود، چون از طریق آن می‌توانیم حدود x را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$P(|x-\mu|<\varepsilon) > 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow \boxed{P(\mu-\varepsilon<x<\mu+\varepsilon) > 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

نکته ۲ : در مسائل مربوط به قضیه چبیشف اولاً توزیع جامعه مشخص نیست ثانیاً تنها داده‌های مسئله میانگین (μ) و انحراف معیار (σ) می‌باشد.

مثال ۱ : چنانچه یک جامعه غیرنرمال باشد فاصله $\mu \pm 2\sigma$ حداقل شامل چند درصد داده‌هاست؟

۱) % 95.45 ۲) % 85 ۳) % 95 ۴) % 75

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P(\mu-2\sigma<x<\mu+2\sigma) = P\left(|x-\mu|<\underbrace{2\sigma}_{\varepsilon}\right) > 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1-\frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = 1-\frac{1}{4} = 0.75$$

نکته :

در جامعهٔ نرمال

$\mu \pm \sigma$ شامل 0.683 داده‌ها
$\mu \pm 2\sigma$ شامل 0.9544 داده‌ها می‌باشد.
$\mu \pm 3\sigma$ شامل 0.997 داده‌ها

مثال ۲ : چنانچه $E(x)=2$ و $E(x^2)=8$ باشد براساس نامساوی چبیشف $P(|x|\geq 8)$ کدام است؟

۱) حداکثر $\frac{1}{9}$ ۲) حداکثر $\frac{1}{4}$ ۳) برابر $\frac{1}{9}$ ۴) حداقل $\frac{1}{9}$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

باتوجه به آن‌که همیشه در قضیه چبیشف مقدار x نامنفی است، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(|x|\geq 8) = P\left(|x-E(x)|\geq 8-\underbrace{E(x)}_{2}\right) = P\left(|x-E(x)|\geq \underbrace{6}_{\varepsilon}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \sigma^2 = E(x^2)-(E(x))^2 = 4 \end{cases}$$

مثال ۳ : اگر میانگین هزنیه مصرفی ماهیانه خانوارهای شهری 210 هزار تومان با انحراف معیار 40 هزار تومان باشد، چه نسبتی از خانوارها دارای هزینه مصرفی 130 تا 290 هزار تومان هستند؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) 68 %　　۲) 95 %　　۳) حداقل 89 %　　۴) حداقل 75 %

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

باتوجه به آن‌که توزیع جامعه نامعلوم و فقط میانگین و انحراف معیار به عنوان داده‌های مسئله مطرح شده‌اند، می‌توانیم از قضیه چبیشف استفاده کنیم، در عین حال چون احتمال حدود هزینه مصرفی را خواسته است، از شکل (II) قضیه اول چبیشف استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} P(130 < x < 290) = P(130 - \mu < x - \mu < 290 - \mu) = P(-80 < x - \mu < 80) \\ \qquad = P\left(|x - \mu| < \underbrace{80}_{\varepsilon}\right) > 1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \dfrac{1600}{6400} = 0.75 \\ \mu = 210 \,,\, \sigma = 40 \end{cases}$$

● قضیه دوم چبیشف

در صورتیکه $x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_n$ یک نمونه مستقل nتائی و $\bar{x}$ میانگین نمونه باشد آنگاه باتوجه به قضیه اول چبیشف خواهیم داشت:

$$P\left(\left|\bar{x} - E(\bar{x})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\varepsilon^2} \quad \text{یا} \quad P\left(\left|\bar{x} - E(\bar{x})\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\varepsilon^2}$$

اما باتوجه به بحث نمونه‌گیری می‌دانیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \quad , \quad E(\bar{x}) = \mu$$

درنتیجه روابط بالا به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

رابطه (I)

$$\boxed{P\left(|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$$

رابطه (II)

$$\boxed{P\left(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}}$$

نکته ۱ : رابطه (II) بیشتر در مسائل به کار برده می‌شود، چون از طریق آن می‌توانیم حدود $\bar{X}$ را مشخص کنیم:

$$P\left(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \longrightarrow \boxed{P\left(\mu - \varepsilon < \bar{x} < \mu + \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}}$$

نکته ۲ : در صورتیکه بخواهیم روابط (I) و (II) از قضیه دوم چبیشف را به صورت حدی بیان کنیم روابط زیر صادق هستند:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \lim\limits_{n \to \infty} P\left(|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon\right) = 0 \\ 2)\ \lim\limits_{n \to \infty} P\left(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon\right) = 1 \end{array}}$$

مثال : دستگاه بسته‌بندی مواد غذایی روی 50 گرم تنظیم شده است، انحراف معیار وزن بسته‌ها 2 گرم می‌باشد. تعداد $n = 10$ بسته را به طور تصادفی انتخاب شده احتمال آن‌که میانگین این 10 بسته بین 46 تا 54 گرم باشد، کدام است؟ (مدیریت ۷۱)

۱) 0.9 ۲) 0.99 ۳) 0.975 ۴) 0.999

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

باتوجه به آن‌که توزیع جامعه نامعلوم و فقط میانگین و انحراف معیار به عنوان داده‌های مسئله مطرح شده‌اند می‌توانیم از قضیه چبیشف استفاده کنیم در عین حال چون احتمال حدود میانگین نمونه $(\bar{X})$ خواسته شده از شکل (II) قضیه دوم چبیشف استفاده کنیم.

$$\begin{cases} P(46<\bar{x}<54)=P(46-\mu<\bar{x}-\mu<54-\mu)=P(-4<\bar{x}-\mu<4)=P\left(|\bar{x}-\mu|<\underbrace{4}_{\varepsilon}\right)>1-\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=1-\dfrac{4}{10\times 16}=0.975 \text{ حداقل} \\ \mu=50\ ,\ \sigma=2\ ,\ n=10 \end{cases}$$

○ توزیع $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ (تفاضل یا مجموع میانگین دو نمونه)

در صورتی‌که n_1 و n_2 دو نمونه مستقل با میانگین‌های $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ و واریانس‌های s_1^2 و s_2^2 از دو جامعه با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 باشند، برای بررسی توزیع مربوط به $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) دو جامعه نرمال با واریانس‌های معلوم σ_1^2 و σ_2^2 ($n_1 \geq 1$ و $n_2 \geq 1$ دلخواه)

در این شرایط توزیع $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ نرمال بوده و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2\ , \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \\ E(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\mu_1 \pm \mu_2 \\ \sigma^2(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2} \\ \sigma(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} \end{cases} \longrightarrow z=\frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

ب) دو جامعه نرمال با واریانس‌های نامعلوم $(n_2>30\ ,\ n_1>30)$ (نمونه بزرگ)

در این شرایط توزیع $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ با توجه به بزرگ بودن نمونه‌ها باز هم نرمال بوده و به جای σ_1^2 و σ_2^2 از s_1^2 و s_2^2 استفاده خواهیم کرد:

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2\ , \dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right) \\ E(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\mu_1 \pm \mu_2 \\ \sigma^2(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2} \\ \sigma(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)=\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}} \end{cases} \longrightarrow z=\frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

ج) دو جامعه نرمال با واریانس‌های نامعلوم ($n_1 \le 30$, $n_2 \le 30$ یا $n_1 + n_2 \le 30$ یا نمونه‌ها کوچک)

در این شرایط توزیع $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ با توجه به کوچک بودن نمونه‌ها دارای توزیع t (استیودنت) بوده که با توجه به فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (برابری واریانس دوجامعه) یا $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ (عدم برابری واریانس دو جامعه) دو وضعیت متفاوت به شرح زیر به وجود می‌آید:

ج ـ ۱) فرض برابری واریانس دو جامعه $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$

در شرایط که واریانس دو جامعه نامعلوم، نمونه‌ها کوچک و فرض برابری واریانس دو جامعه مطرح باشد، می‌توان هر دو جامعه را یک جامعه فرض کرده و از واریانس ترکیبی (آمیخته) s_p^2 برای هر دو استفاده کرد در این وضعیت $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ با توجه به شرایط مطرح شده دارای توزیع t با $n_1 + n_2 - 2$ درجه ازادی خواهد بود.

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \pm \bar{X}_2 \sim t_{n_1+n_2-2}\left(\mu_1 \pm \mu_2, \dfrac{s_p^2}{n_1} + \dfrac{s_p^2}{n_2}\right) \\ E\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) = \mu_1 \pm \mu_2 \\ \sigma^2\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) = \dfrac{s_p^2}{n_1} + \dfrac{s_p^2}{n_2} \\ s_p^2 = \dfrac{\left(n_1 - 1\right)s_1^2 + \left(n_2 - 1\right)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{(واریانس ترکیبی)} \\ \sigma\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) = s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}} \end{cases} \longrightarrow t_{n_1+n_2-2} = \frac{\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 \pm \mu_2\right)}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

ج ـ ۲) فرض عدم برابری واریانس دو جامعه $\left(\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2\right)$

در شرایطی که واریانس دو جامعه نامعلوم، نمونه‌ها کوچک و فرض عدم برابری واریانس دوجامعه مطرح باشد از s_1^2 و s_2^2 به جای σ_1^2 و σ_2^2 استفاده کرده، در این وضعیت $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ با توجه به شرایط مطرح شده دارای توزیع t با r درجه ازادی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \pm \bar{x}_2 \sim t_r\left(\mu_1 \pm \mu_2, \dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right) \\ E\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) = \mu_1 \pm \mu_2 \\ \sigma^2\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) = \dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2} \\ r = \dfrac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\dfrac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \quad \text{(درجه آزادی)} \end{cases} \longrightarrow t_r = \frac{\left(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2\right) - \left(\mu_1 \pm \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

توجه:

۱ـ در شرایطی که در صورت مسئله واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 مطرح نشوند آن‌ها را به طور پیش‌فرض نامعلوم در نظر می‌گیریم.

۲ـ در شرایطی که در صورت مسئله n_1 و n_2 ذکر شود آن‌ها را به طور پیش‌فرض کوچک و $n_1 \le 30$ و $n_2 \le 30$ در نظر می‌گیریم.

مثال ۱: توزیع نمرات ارزشیابی یک سازمان نرمال است. با میانگین 14.5 و انحراف معیار 6، اگر یک نمونه 25 نفری از بین آنان انتخاب شود، با کدام احتمال میانگین نمرات ارزشیابی آنان بین 16 , 13 است؟ $\left(S_0^{1.25} = 0.3944\right)$ (حسابداری ۸۴)

۱) 0.3944 ۲) 0.6056 ۳) 0.7888 ۴) 0.8944

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$x \sim N\left(\mu = 14.5 , \sigma^2 = 36\right) \rightarrow \mu = 14.5 , \sigma = 6$$

جامعه نرمال و واریانس معلوم است پس n هر چه باشد بنابر مورد اول توزیع میانگین نمونه $\left(\bar{X}\right)$ نرمال است با:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ و } Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$P\left(13<\bar{x}<16\right) = P\left(\frac{13-14.5}{\frac{6}{\sqrt{25}}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{16-14.5}{\frac{6}{\sqrt{25}}}\right) = P\left(-1.25<z<1.25\right) = \int_{-1.25}^{1.25} f(z)\,dz \xrightarrow[\text{راهنمائی}]{\text{با توجه به}} 2\times 0.3944 = 0.7888$$

مثال ۲: احتمال آن‌که میانگین یک نمونه 64تائی از جامعه‌ای که دارای میانگین 90 و انحراف معیار 8 است کمتر از 88 باشد، چند درصد است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) 2.5 ۲) 5 ۳) 45 ۴) 47.5

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} P\left(\bar{X} < 88\right) = P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \dfrac{88-90}{\frac{8}{\sqrt{64}}}\right) = P\left(Z < -2\right) = \dfrac{1-0.9544}{2} \simeq \%2.5 \\ \mu = 90 \quad , \quad \sigma = 8 \quad , \quad n = 64 \end{cases}$$

توجه: $P\left(-2 < z < 2\right) = 0.9544$ می‌باشد که در بعضی مراجع 0.95 در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۳: در یک نمونه‌گیری تصادفی به حجم $n > 1$ از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2، توزیع نمونه‌ای $\left(\bar{x} - \mu\right)$ کدام‌یک از موارد زیر می‌باشد؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) $\left(\bar{x} - \mu\right) \sim \chi^2_{\alpha , n-1}$

۲) $\left(\bar{x} - \mu\right) \sim N\left(\mu , \sigma^2_{\bar{x}-\mu}\right)$

۳) $\left(\bar{x} - \mu\right) \sim N\left(0 , \dfrac{\sigma_x^2}{n}\right)$

۴) $\left(\bar{x} - \mu\right) \sim N\left(0 , \dfrac{\sigma_{\bar{x}}^2}{n}\right)$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با در نظر گرفتن توزیع $\bar{X}$ به صورت $\bar{X} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma^2}{n}\right)$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} E\left(\bar{X}-\mu\right)=E\left(\bar{X}\right)-E\left(\mu\right)=\mu-\mu=0 \\ \sigma^2\left(\bar{x}-\cancel{\mu}^{\,0}\right)=\sigma_{\bar{x}}^2=\dfrac{\sigma_x^2}{n} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\bar{X}-\mu\right) \sim N\left(0 , \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$$

○ توزیع واریانس نمونه $\left(S^2\right)$

برای بررسی توزیع آماره $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}$ که واریانس نمونه است از توزیع $\chi^2_{(n-1)}$ با $n-1$ درجه آزادی به شرح زیر استفاده می‌شود.

$$\boxed{\chi^2_{(n-1)}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} \xrightarrow{S^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}} \boxed{\chi^2_{(n-1)}=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\sigma^2}}$$

توجه: هرگاه μ جامعه معلوم باشد واریانس نمونه از رابطه $s^2=\dfrac{\sum\left(x_i-\mu\right)^2}{n}$ به دست می‌آید و در این حالت توزیع واریانس نمونه از توزیع $\chi^2_{(n)}$ با n درجه آزادی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\chi^2_{(n)}=\frac{ns^2}{\sigma^2} \xrightarrow{s^2=\frac{\sum\left(x_i-\mu\right)^2}{n}} \chi^2_{(n)}=\frac{\sum\left(x_i-\mu\right)^2}{\sigma^2}$$

این توزیع دقیق‌تر است اما فقط در شرایطی استفاده می‌شود که حتماً در صورت سؤال بگویند μ جامعه معلوم است در غیر این صورت پیش فرض از مورد قبل استفاده می‌شود.

مثال ۱: در یک جامعه نرمال احتمال این‌که واریانس یک نمونه 81 تائی کمتر از واریانس جامعه باشد. کدام است؟ (اقتصاد ۸۲)

۱) $P\left(\chi^2_{(80)} \le 81\right)$ ۲) $P\left(F_{1,80} \le 5\right)$ ۳) $P\left(F_{1,80} \le 6\right)$ ۴) $P\left(\chi^2_{(80)} \le 80\right)$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} P\left(S^2<\sigma^2\right)=P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\dfrac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right)=P\left(\chi^2_{n-1}<n-1\right)=P\left(\chi^2_{80}<80\right) \\ n=81 \end{cases}$$

مثال ۲: اگر $n=10$ و $S_x^2=80$ و $\sigma_x^2=65$ باشد مقدار استاندارد کای مربع کدام است؟

۱) 11.08 ۲) 1.23 ۳) 15.32 ۴) 8.125

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \chi^2_{n-1} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \\ n = 10 \end{cases} \Rightarrow \chi^2_9 = \frac{9 \times 80}{65} = 11.08$$

مثال۳: نمونه‌ای به حجم n از جامعه نرمال انتخاب شده است و براساس متغیرهای نمونه، تخمین‌زن واریانس به صورت $S^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ تعریف شده است. امید ریاضی آن کدام است؟ (اقتصاد ۷۴)

۱) σ^2 ۲) $\dfrac{\sigma^2}{n}$ ۳) $\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ ۴) $n\sigma^2$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

می‌دانیم که:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \ , \begin{cases} E\left(\chi^2_{(n-1)}\right) = n-1 \\ \sigma^2\left(\chi^2_{(n-1)}\right) = 2(n-1) \end{cases}$$

$$E\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{n}\right) = E\left(\frac{\sigma^2\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2\, n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\, E\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{n} E\left(\chi^2_{(n-1)}\right) = \frac{\sigma^2}{n}.n-1$$

در صورت سؤال منظور از $\bar{x}$ همان μ بوده است.

توزیع آمارهٔ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ (نسبت واریانس‌های دو نمونه)

در صورتی‌که s_1^2 و s_2^2 واریانس‌های دو نمونه مستقل از هم با حجم n_1 و n_2 از دو جامعه نرمال با واریانس‌های نامعلوم σ_1^2 و σ_2^2 و میانگین‌های نامعلوم μ_1 و μ_2 باشند.

از آن‌جائیکه آمارهٔ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ توزیع مشخصی را نشان نمی‌دهد، لذا با در نظر گرفتن روابط زیر توزیع مربوط به آماره $\dfrac{\left(S_1^2/\sigma_1^2\right)}{\left(S_2^2/\sigma_2^2\right)}$ در شرایطی که شرط برابری واریانس دو جامعه برقرار باشد $\left(\sigma_1^2 = \sigma_2^2\right)$ همان توزیع آمارهٔ $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ خواهد بود.

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\dfrac{1}{(n_1-1)} \times \dfrac{(n_1-1)s_2^2}{\sigma_2^2}}{\dfrac{1}{(n_2-1)} \times \dfrac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}} = \xrightarrow[\chi^2_{(n_2-1)} = \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}]{\chi^2_{(n_1-1)} = \frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}} = \frac{\dfrac{\chi^2_{(n_1-1)}}{(n_1-1)}}{\dfrac{\chi^2_{(n_2-1)}}{(n_2-1)}} = F_{n_1-1,n_2-1}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

به عبارت بهتر:

$$\frac{\left(s_1^2/\sigma_1^2\right)}{\left(s_2^2/\sigma_2^2\right)} \sim F_{n_1-1,\,n_2-1} \xrightarrow{\sigma_1^2=\sigma_2^2} \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1-1,\,n_2-1}$$

تعریف: آماره $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ دارای توزیع F (فیشر) با (n_1-1) درجه آزادی برای صورت (n_2-1) درجه آزادی برای مخرج کسر خواهد بود. در شرایطی که $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$ باشد.

○ توزیع نسبت نمونه $(\bar{P})$

در یک آزمایش دوجمله‌ای (با پارامتر P) در n بار تکرار یک عمل در صورتیکه تعداد موفقیت‌ها x باشد، $\bar{P}=\frac{x}{n}$ نسبت موفقیت در نمونه خواهد بود، بنابراین آماره $\bar{P}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{\bar{P}=\frac{x}{n}}$$

به این آماره نرخ موفقیت نیز گفته می‌شود، و توزیع آن باتوجه به تقریب دو جمله‌ای $(np>5\,,\,nq>5)$ توزیع نرمال خواهد بود.

امید و واریانس نسبت نمونه $(\bar{P})$ به شرح زیر بررسی می‌شود:

$$E(\bar{P})=E\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{E(x)}{n}=\frac{nP}{n}=P$$

$$\sigma^2_{(\bar{P})}=\sigma^2\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{\sigma^2(x)}{n^2}=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}$$

$$\sigma_{(\bar{P})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

آماره $\bar{P}$ مانند آماره $\bar{X}$ تحت تأثیر نوع نمونه‌گیری (با جایگذاری یا بدون جایگذاری) است، حال اگر نمونه از جامعه محدود Nتائی بدون جایگذاری گرفته شده باشد ضریب تصحیح واریانس $\frac{N-n}{N-1}$ در $\sigma^2_{\bar{P}}$ دیده می‌شود.

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{P}}=\frac{N-n}{N-1}\times\frac{pq}{n}}$$

نکته : هنگام محاسبه $\sigma_{\bar{P}}$ و $E(\bar{P})$ در صورتیکه q , p وجود نداشته باشد به جای آن‌ها از $\bar{p}$, $\bar{q}$ و در صورت عدم وجود از $\frac{1}{2}$ برای هر کدام استفاده می‌کنیم.

بنابراین:

۱)

امید نسبت نمونه همان نسبت جامعه است	$E(\bar{P})=P$	
$\sigma_{(\bar{P})}=\sqrt{\frac{pq}{n}}$ و	$\sigma^2_{(\bar{P})}=\frac{pq}{n}$	(جامعه نامحدود)

در شرایطی که نمونه‌گیری بدون جایگذاری از جامعه محدود N تائی انجام گیرد:

$$\boxed{\sigma^2_{\bar{P}} = \frac{N-n}{N-1}\,\frac{pq}{n}}$$

۲) باتوجه به آن‌که توزیع آماره $\bar{P}$ نرمال خواهد بود بنابراین مقدار z در نرمال استاندارد برای آن عبارتست از:

$$Z = \frac{\bar{P} - E(\bar{P})}{\sigma_{\bar{P}}} \longrightarrow \boxed{Z = \frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}}$$

مثال: برای بررسی درصد بیکاری در یک نمونه 100 نفری از جامعه‌ای 20 نفر بیکار هستند، نرخ بیکاری و انحراف معیار نرخ بیکاری کدام است؟

۱) 0.04 , 0.2 ۲) 0.02 , 0.8 ۳) 0.16 , 0.2 ۴) 0.08 , 0.2

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} x = 20 \quad , \quad n = 100 \\ \bar{P} = \frac{x}{n} = 0.2 \text{ و نرخ بیکاری } \bar{q} = 0.8 \\ \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{100}} = 0.04 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ برآورد

در فصل مربوط به نمونه‌گیری به این نتیجه رسیدیم که برای تحلیل یک پارامتر مجهول در جامعه (θ) باید نمونه‌ای از جامعه انتخاب کرده و براساس نتایج به‌دست آمده از روی نمونه با انتخاب یک آماره مناسب $(\hat{\theta})$ به بحث و نتیجه‌گیری در مورد پارامتر پرداخت.

بحث و نتیجه‌گیری در مورد پارامتر مجهول جامعه با توجه به اطلاعات به‌دست آمده حاصل از نمونه به دو بخش تقسیم می‌شوند.

۱) برآورد (Estimate) پارامتر مجهول جامعه

۲) آزمون فرض پارامتر مجهول جامعه

به طور کلی برآورد پارامتر مجهول جامعه به دو بخش تقسیم می‌شود.

الف) برآورد نقطه‌ای

ب) برآورد فاصله‌ای

الف) برآورد نقطه‌ای:

هرگاه از مقدار آماره $(\hat{\theta})$ برای برآورد (تخمین) پارامتر (θ) استفاده کنیم، آنگاه برآورد نقطه‌ای آن پارامتر را به‌دست آورده‌ایم، در این حالت به مقدار این آماره (تخمین زن) برآورد نقطه‌ای پارامتر می‌گوئیم.

نکته:

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

✓ آمارهٔ $\bar{X}$ یک برآورد نقطه‌ای برای پارامتر μ می‌باشد.

✓ آمارهٔ $\bar{P}$ یک برآورد نقطه‌ای برای پارامتر P می‌باشد.

✓ آمارهٔ S^2 یک برآورد نقطه‌ای برای پارامتر σ^2 می‌باشد.

مثال ۱: در یک نمونه 100 تائی از جامعه‌ای برای برآورد میانگین جامعه (μ) در صورتیکه واریانس نمونه $S^2 = 16$ باشد، برآورد نقطه‌ای انحراف معیار میانگین نمونه کدام است؟

$$\begin{cases} n = 100 \ , \ S_x^2 = 16 \rightarrow S_x = 4 \\ \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{S_x}{\sqrt{n}} = \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 0.4 \end{cases}$$

مثال ۲: در یک نمونه 100 تائی برای برآورد نسبت بیکاری در جامعه (P) 80 نفر بیکار بودند، برآورد نقطه‌ای نرخ بیکاری و انحراف معیار نرخ بیکاری کدام است؟

$$\begin{cases} \bar{P} = \dfrac{x}{n} = \dfrac{80}{100} = 0.8 & \text{برآورد نرخ بیکاری} \\ \sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\dfrac{\bar{p}\,\bar{q}}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.8 \times 0.2}{100}} = 0.04 & \text{انحراف معیار نرخ بیکاری} \end{cases}$$

چون برآوردهای نقطه‌ای تابعی از نمونه تصادفی هستند، بنابراین برای هر پارامتر مجهول برآورد کننده‌های مختلفی وجود دارد، برای همین باید در بین برآورد کننده‌های مختلف برای یک پارامتر مجهول بهترین آن‌ها را انتخاب کنیم.

○ خواص مطلوب برای آماره‌ها (برآورد کننده‌های نقطه‌ای)

برای هر پارامتر در جامعه (θ) تخمین زننده‌های $(\hat{\theta})$ مختلفی وجود دارد که باید بهترین آن‌ها برای استنباط پارامتر انتخاب شود، خواصی که می‌توان از روی آن‌ها بهترین آماره را برای تخمین پارامتر انتخاب کرد به شرح زیر است:

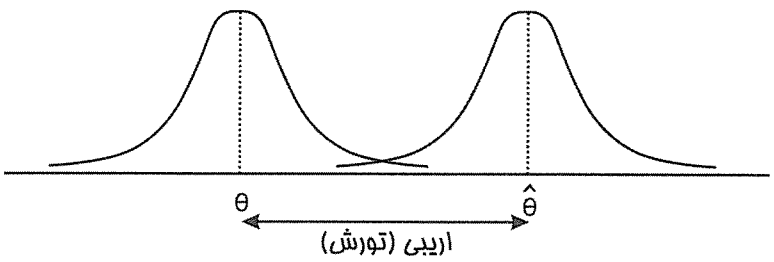
۱ـ نااریب (بدون تورش ـ ناتور)

هرگاه میانگین آماره $\hat{\theta}$ به طور دقیق بر θ (پارامتر) منطبق باشد آنگاه $\hat{\theta}$ برآورد کننده‌ای نااریب خواهد بود به عبارت بهتر:

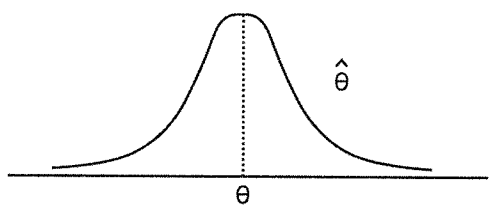
$\hat{\theta}$ برای θ نااریب است $\longleftrightarrow$ $E(\hat{\theta}) = \theta$

اریبی (تورش): در صورتیکه $E(\hat{\theta})$ با θ متفاوت باشد $\hat{\theta}$ را اریب می‌نامیم و مقدار اریبی عبارتست از:

$$\text{اریبی} = E(\hat{\theta}) - \theta$$



ب) $\hat{\theta}$ اریب



الف) $\hat{\theta}$ نااریب

در عین حال هرگاه $\hat{\theta}$ برای θ نااریب باشد آنگاه $E(\hat{\theta}) = \theta$ در نتیجه مقدار اریبی صفر است.

$$\text{اریبی} = E(\hat{\theta}) - \theta = 0$$

مثال ۱: در صورتیکه x_1 , x_2 , x_3 دارای توزیعی با میانگین μ باشند آنگاه کدامیک از آماره‌های T_1 , T_2 , T_3 برای میانگین جامعه نااریب هستند؟

$$T_1 = \frac{3x_1 + x_2}{3} \quad T_2 = \frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{6} \quad T_3 = \frac{x_1 + 3x_2 - x_3}{3}$$

۱) T_1 ۲) T_3 , T_2 ۳) T_3 , T_1 ۴) T_2 , T_1

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای آنکه آماره‌های T_1 , T_2 , T_3 برای μ جامعه نااریب باشند باید امید (میانگین) هر کدام از آن‌ها برابر μ شود.

$$E(T_1) = E\left(\frac{3x_1 + x_2}{3}\right) = \frac{3E(x_1) + E(x_2)}{3} = \frac{4\mu}{3} \neq \mu \text{ اریب}$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{3x_1 + 2x_2 + x_3}{6}\right) = \frac{3E(x_1) + 2E(x_2) + E(x_3)}{6} = \frac{6\mu}{6} = \mu \text{ نااریب}$$

$$E(T_3) = E\left(\frac{x_1 + 3x_2 - x_3}{3}\right) = \frac{E(x_1) + 3E(x_2) - E(x_3)}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu \text{ نااریب}$$

در عین حال میزان اریبی T_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{اریبی} = E\,(\text{آماره}) - \text{پارامتر} = E(T_1) - \mu = \frac{4\mu}{3} - \mu = \frac{\mu}{3}$$

مثال ۲: در صورتیکه $T = 2x + (1-\alpha)x$ برآورد کننده (آماره) میانگین جامعه باشد و x نیز دارای میانگین μ باشد به ازاء کدام مقدار از α، T یک برآورد کننده نااریب خواهد بود؟

برای نااریب بودن کافی است $E(T) = \mu$ شود، در نتیجه

$$E(T) = E\big(2x + (1-\alpha)x\big) = 2\mu + (1-\alpha)\mu = \mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 2}$$

نکته: آماره‌های نااریب مهم به شرح زیر هستند:

الف) $\bar{p}$ نسبت نمونه برای p نسبت جامعه

$$\boxed{E(\bar{p}) = p}$$

ب) $\bar{x}$ میانگین نمونه برای μ میانگین جامعه

$$\boxed{E(\bar{x}) = \mu}$$

ج) S^2 واریانس نمونه برای σ^2 واریانس جامعه

$$\boxed{E(S^2) = \sigma^2}$$

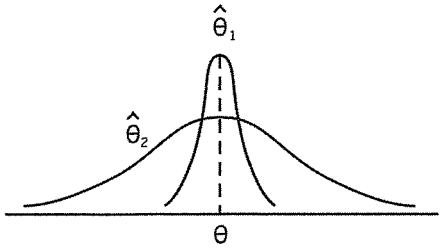
منظور از S^2 عبارت $S^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ است، البته اگر به جای $\bar{x}$ از μ (میانگین واقعی جامعه) استفاده کنیم مخرج کسر n شده و $S^2 = \dfrac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}$ برآورد کننده نااریب بهتری خواهد بود.

د) Md (میانه) برای μ میانگین جامعه

$$\boxed{E(Md) = \mu}$$

۲ـ شرط کارائی برآورد کننده‌های نااریب (حداقل واریانس)

بعد از بررسی شرط نااریب بودن آماره‌ها (برآورد کننده‌ها) **از بین دو برآورد کننده (آماره) نااریب $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ برای θ برآورد کننده‌ای کاراتر است که متمرکزتر باشد یا به عبارت بهتر واریانس کمتری داشته باشد.**



$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ هر دو برآورد کننده‌های نااریب برای θ هستند اما $\hat{\theta}_1$ از $\hat{\theta}_2$ کاراتر است چون واریانس کمتری دارد.

- **شرط کاراتر بودن $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$ این است که**

$$\boxed{\text{var}(\hat{\theta}_1) < \text{var}(\hat{\theta}_2) \longleftrightarrow \hat{\theta}_1 \text{ از } \hat{\theta}_2 \text{ کاراتر است}}$$

● **کارایی نسبی $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$ به صورت روبرو تعریف می‌شود.**

کارائی نسبی $\hat{\theta}_1$ نسبت به $\hat{\theta}_2$	$= \dfrac{\mathrm{var}(\hat{\theta}_2)}{\mathrm{var}(\hat{\theta}_1)}$	>1 : $\hat{\theta}_1$ از $\hat{\theta}_2$ کاراتر <1 : $\hat{\theta}_2$ از $\hat{\theta}_1$ کاراتر

مثال: در صورتیکه x_1 , x_2 , x_3 مستقل از هم، از جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، آماره‌ها T_1 , T_2 برای میانگین جامعه از نظر نااریبی و کارائی چگونه‌اند؟

$$T_1 = \frac{x_1 + 3x_2}{4} \qquad T_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}$$

$$(\mathrm{I})\begin{cases} E(T_1) = E\left(\dfrac{x_1 + 3x_2}{4}\right) = \dfrac{E(x_1) + 3E(x_2)}{4} = \dfrac{4\mu}{4} = \mu & \text{نااریب} \\ E(T_2) = E\left(\dfrac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right) = \dfrac{E(x_1) + 2E(x_2) + 3E(x_3)}{6} = \dfrac{6\mu}{6} = \mu & \text{نااریب} \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} \mathrm{var}(T_1) = \mathrm{var}\left(\dfrac{x_1 + 3x_2}{4}\right) = \dfrac{\sigma^2}{16} + \dfrac{9\sigma^2}{16} = \dfrac{10}{16}\sigma^2 \\ \mathrm{var}(T_2) = \mathrm{var}\left(\dfrac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{6}\right) = \dfrac{\sigma^2}{36} + \dfrac{4\sigma^2}{36} + \dfrac{9\sigma^2}{36} = \dfrac{14}{36}\sigma^2 \end{cases}$$

$\mathrm{var}(T_2) < \mathrm{var}(T_1) \longrightarrow$ T_2 از T_1 کاراتر

$$\text{کارائی نسبی } T_2 \text{ به } T_1 = \frac{\mathrm{var}(T_1)}{\mathrm{var}(T_2)} = \frac{\frac{10}{16}\sigma^2}{\frac{14}{36}\sigma^2} = \frac{45}{28}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۳ـ شرط سازگاری (پایداری)

آماره (برآورد کننده) $\hat{\theta}$ را برای پارامتر θ سازگار گوئیم هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) در صورتیکه n به سمت ∞ میل کند واریانس آماره $\hat{\theta}$ به سمت 0 میل کند. $\rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\theta}) = 0}$

ب) در صورتیکه n به سمت ∞ میل کند آماره $\hat{\theta}$ به سمت پارامتر θ میل می‌کند. $\rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\theta} = \theta}$

نکته : آماره‌های سازگار مهم عبارتند از:

الف) آمارهٔ $\bar{x}$ برای پارامتر μ: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{var}(\bar{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma^2}{n} = 0$

ب) آمارهٔ $\bar{p}$ برای پارامتر p: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{var}(\bar{p}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{pq}{n} = 0$

ج) آماره s^2 برای پارامتر σ^2: منظور از $s^2 = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ و یا $s^2 = \dfrac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}$ است.

مثال۱: آمارهٔ $\bar{x}$ یک آماره سازگار است چون وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، $\bar{x}$ به سمت ..... میل می‌کند.

۱) ∞ ۲) $N\mu$ ۳) μ ۴) 0

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال۲: آمارهٔ $\bar{x}$ یک آماره سازگار است چون وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، واریانس $\bar{x}$ به سمت ..... میل می‌کند.

۱) ∞ ۲) $N\mu$ ۳) μ ۴) 0

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال۳: از بین برآوردکننده‌های زیر برای میانگین جامعه کدام سازگارند؟

$$T_1 = n^2\,\bar{x} \rightarrow \lim_{n\to\infty} var\left(T_1\right) = \lim_{n\to\infty} var\left(n^2\,\bar{x}\right) = \lim_{n\to\infty} n^4\,\frac{\sigma^2}{n} = \infty \quad \text{ناسازگار}$$

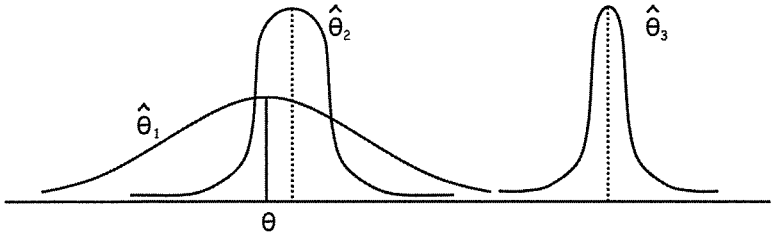
$$T_2 = \frac{\bar{x}}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} var\left(T_2\right) = \lim_{n\to\infty} var\left(\frac{\bar{x}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\times\frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad \text{سازگار}$$

۴ـ شرط حداقل میانگین مجذور خطا (MSE)

همان‌طور که مطرح شد در بین دو برآورد کننده نااریب، برآورد کننده‌ای بهتر (کاراتر) است که واریانس کمتری داشته باشد.

✓ در بین دو برآورد کننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآورد کننده‌ای بهتر است که بهترین ترکیب از واریانس و اریب کوچک را داشته باشد.

✓ با توجه به شکل، $\hat{\theta}_2$ دارای کمترین اریبی و واریانس بوده بنابراین بهترین آماره است.



✓ $\hat{\theta}_1$ با آنکه نااریب است اما واریانس آن زیاد است.

✓ $\hat{\theta}_3$ دارای اریبی بزرگی است و مناسب نخواهد بود.

شاخص کمترین واریانس و اریبی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\boxed{MSE = E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = var\left(\hat{\theta}\right) + \left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 = var\left(\hat{\theta}\right) + (\text{اریبی})^2}$$

این رابطه ملاکی است که هم واریانس و هم اریبی را مد نظر قرار می‌دهد.

نکته: در بین دو برآورد کننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآورد کننده‌ای بهتر است که «حداقل مقدار MSE» یا حداقل « مقدار میانگین مجذور خطا» را داشته باشد.

دیده می‌شود که اگر برآورد کننده‌ها نااریب باشند $MSE = var\left(\hat{\theta}\right)$ خواهد شد و حداقل میانگین مجذور خطا همان حداقل واریانس یعنی شرط کارائی خواهد شد.

$$MSE = E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] = var\left(\hat{\theta}\right) + (\text{اریبی})^2 \xrightarrow{\hat{\theta}\ \text{نااریب}} MSE = var\left(\hat{\theta}\right)$$

بنابراین کارائی نسبی را به صورت دقیق‌تر می‌توانیم به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\hat{\theta}_2 \text{ به } \hat{\theta}_1 \text{ کارائی نسبی } = \frac{MSE(\hat{\theta}_2)}{MSE(\hat{\theta}_1)}$$

مثال: در بین دو برآورد کننده دلخواه برآورد کننده‌ای بهتر و کاراتر است که ..... را داشته باشد.

۱) حداقل واریانس
۲) حداقل میانگین مجذور خطا (MSE)
۳) نااریب
۴) اریب

حل : گزینه ۲صحیح می‌باشد.

توجه کنید گزینه ۲، گزینه ۱ را پوشش می‌دهد.

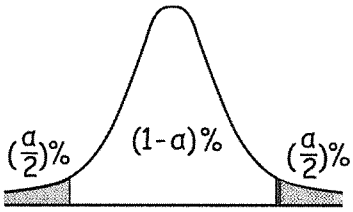
ب) برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

در برآورد فاصله‌ای با تعیین فاصله‌ای به نام فاصله اطمینان حدودی را مشخص می‌کنیم که با درصد اطمینان مشخصی $((1-\alpha)\%)$ یقین داریم پارامتر مجهول (θ) در آن فاصله قرار دارد.

هر فاصله اطمینان برای پارامتر θ، فاصله‌ای است به صورت $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$ که با احتمال $(1-\alpha)\%$ پارامتر θ در آن قرار دارد، به عبارت بهتر:

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = (1-\alpha)\%$$

در این وضعیت:
- فاصله اطمینان : $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$
- درجه اطمینان : $(1-\alpha)\%$
- درجه خطا : $\alpha\%$



سطوح اطمینان $(1-\alpha)\%$ معمولاً به صورت 90% , 95% , 99% در نظر گرفته می‌شود. که در این صورت درجه خطای آن‌ها $\alpha\%$ به صورت 10% , 5% , 1% خواهد بود.

برای تعیین فاصله اطمینان برای هر پارامتر ابتدا یک آماره (برآورد کننده نقطه‌ای) مناسب انتخاب کرده و از روی آن با تشکیل یک توزیع نمونه‌ای مناسب فاصله اطمینان را محاسبه می‌کنیم.

○ مزیت برآورد فاصله‌ای به برآورد نقطه‌ای

در برآورد فاصله‌ای به این علت که با تعیین یک فاصله به نام فاصله اطمینان درجه صحت و حدود خطا مشخص می‌شود دقت بیشتری نسبت به برآورد نقطه‌ای دارد.

مثال: علت این که برآورد فاصله‌ای به برآورد نقطه‌ای ترجیح داده می‌شود این است که:(اقتصاد ۷۵)

۱) برآوردهای بدون تورش و سازگارتری به دست می‌دهد.
۲) برآوردهای سازگار و کارآتری به دست می‌دهد.
۳) برآوردهای بدون تورش، سازگار و کارآتری به دست می‌دهد.
۴) درجهٔ صحت برآورد را مشخص می‌کند.

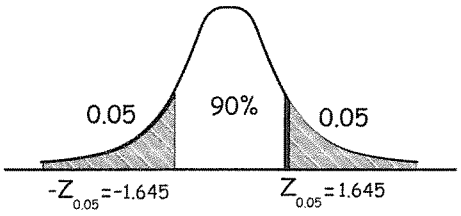
حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مقادیر Z برای سطوح 90%، 95%، 99%

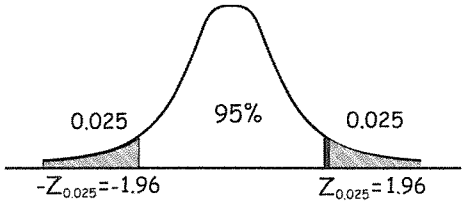
از آن‌جا که توزیع بیشتر برآوردکننده‌های آماری نرمال استاندارد (Z) است مقادیر جدول Z برای سطح اطمینان 90%، 95%، 99% به شرح زیر است:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = (1-\alpha)\%$$

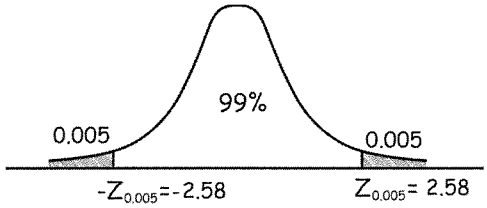
$$P(-1.645 < Z < 1.645) = \%90$$



$$P(-1.96 < Z < 1.96) = \%95$$



$$P(-2.58 < Z < 2.58) = \%99$$



دیده می شود که هر چه سطح اطمینان بیشتر می‌شود، مقدار $\left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|$ بیشتر و $\frac{\alpha}{2}$ کوچکتر می‌شود. در نتیجه با افزایش مقدار $\left|Z_{\frac{\alpha}{2}}\right|$ همان‌طور که بعداً خواهیم دید طول فاصله بیشتر شده و مقدار خطا نیز بیشتر می‌شود و در نهایت دقت برآورد کمتر می‌شود.

مثال: اگر در برآورد فاصله‌ای میانگین جامعه سطح اطمینان $(1-\alpha)$ زیادشود، دقت برآورد چه تغییری خواهد کرد؟ (اقتصاد ۷۶)

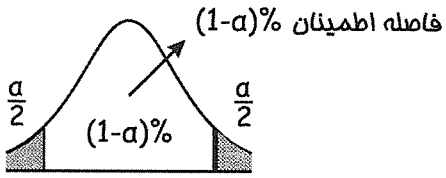
۱) به همان نسبت زیاد می‌شود.
۲)زیاد می‌شود.
۳) تغییری نمی‌کند.
۴) کم می‌شود.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۱ـ برآورد فاصله برای میانگین جامعه (μ)

با فرض آن‌که در جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به حجم n انتخاب کرده باشیم، $\bar{X}$ (میانگین نمونه) به عنوان بهترین برآورد کننده نقطه‌ای برای μ (میانگین جامعه) در تعیین فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\text{تابع محوری} = t \text{ یا } Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$



در این حالت فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به صورت $\bar{x} \pm e$ خواهد بود که e میزان دقت یا خطا را مشخص می‌کند، حالات مختلف فاصله اطمینان برای میانگین جامعه به شرح زیر می‌باشد:

الف) جامعه اصلی نرمال و σ^2 معلوم و $n \geq 1$

$$\boxed{\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{x}} \rightarrow \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

ب) جامعه اصلی نرمال و σ^2 نامعلوم و $n > 30$

$$\boxed{\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,S_{\bar{x}} \rightarrow \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{S_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{S_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

ج) جامعه اصلی نرمال و σ^2 نامعلوم و $n \leq 30$ **: (توزیع t)**

$$\boxed{\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \times S_{\bar{x}} \rightarrow \left(\bar{x} - t_{(n-1),\,\alpha/2}\frac{S_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{(n-1),\,\alpha/2}\frac{S_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

د) جامعه اصلی غیرنرمال و σ^2 معلوم $(n > 30)$ **: (قضیه حد مرکزی)**

$$\boxed{\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma_{\bar{x}} \rightarrow \left(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

هـ) جامعه اصلی غیرنرمال و σ^2 معلوم $(n \leq 30)$ **: (قضیه چبیشف)**

$$\boxed{\bar{x} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \sigma_{\bar{x}} \rightarrow \left(\bar{x} - \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)}$$

مثال ۱: نمرات یک نمونه تصادفی 3 تایی از دانشجویان کلاسی که دارای توزیع نرمال است. 16، 15 و 17 بوده است. فاصله اطمینان 90% میانگین نمرات دانشجویان کدام است؟ $(t \approx 3)$ (اقتصاد ۸۶)

۱) 15.3 – 16.7 ۲) 14.3 – 17.7 ۳) 13.9 – 18.1 ۴) 13.7 – 18.3

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال، واریانس نامعلوم و $n \leq 30$ است بنابر مورد ج داریم:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

مقدار t داده شده اما $\bar{x}$ و s باید با توجه به داده‌های نمونه برآورد شوند.

نکته: هرگاه تعداد نمونه $n = 3$ باشد و اعداد نمونه متوالی باشند واریانس نمونه یک است و میانگین اعداد برابر با عدد وسط است در این سوال نیز $n = 3$ و اعداد نمونه متوالی‌اند پس داریم:

$$15 - 16 - 17 \xrightarrow[\text{اعداد متوالی}]{n=3} \bar{x} = \text{داده وسط} = 16 \,,\, s^2 = 1 \rightarrow s = 1$$

اگر از طریق فرمول نیز محاسبه کنیم به همین اعداد می‌رسیم.

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{15+16+17}{3} = \dfrac{48}{3} = 16 \\ s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{(15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2}{3-1} = \dfrac{1+0+1}{2} = 1 \rightarrow s^2 = 1 \end{cases}$$

$$\mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 16 \pm 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 16 \pm \sqrt{3} \xrightarrow[\text{بگیرید. } 1.7]{\text{همیشه } \sqrt{3} \text{ را برابر}} (14.3 \,, 17.7)$$

مثال۲: یک نمونه تصادفی از 64 لامپ نشان می‌دهد که عمر متوسط نمونه 350 ساعت است. یک فاصله اطمینان 95 درصد برای متوسط طول عمر واقعی لامپ‌ها با فرض $\sigma_x = 100$ عبارت است از: (اقتصاد ۸۵)

۱) 150 تا 550 ۲) 154 تا 546 ۳) 250.5 تا 449.5 ۴) 325.5 تا 374.5

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جامعه غیرنرمال (چون ذکر نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n = 64 > 30$ است پس بنابر مورد د (قضیه حد مرکزی) داریم:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 350 \pm 2 \times \dfrac{100}{\sqrt{64}} = 350 \pm 25 \rightarrow (325, 375) \xrightarrow[\text{گزینه}]{\text{نزدیک‌ترین}} (325.5 \,, 374.5) \\ \bar{x} = 350 \,,\, \sigma = 100 \,, n = 64 \,, \alpha = 0.05 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

توجه: برای راحتی در محاسبه همیشه $z_{0.025} \simeq 2$ در نظر بگیرید و در آخر نزدیک‌ترین گزینه به اعداد به دست آمده را به عنوان جواب انتخاب کنید. در این سوال نزدیک‌ترین گزینه به اعداد (325 , 375) گزینه ۴ است. (325.5 , 374.5) در واقع نزدیک‌ترین گزینه، گزینه‌ای است که حد پائین آن کمی بیشتر و حد بالای آن کمی کمتر است.

مثال۳: کمیت تصادفی X برطبق قانون نرمال با واریانس $\sigma^2 = 25$ توزیع شده است از این جامعه نمونه‌ای به حجم $n = 100$ به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و تخمین امیدریاضی $\bar{X} = 180$ به دست آمده است. فاصله اعتماد 95% برای میانگین (μ) جامعه کدام است؟(اقتصاد ۷۱)

۱) (179.02 , 180.98) ۲) (179.18 , 180.82) ۳) (178.835 , 811.65) ۴) (178.712 , 181.288)

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال، واریانس معلوم و $n \geq 1$ است بنابر مورد الف داریم:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 180 + 2 \times \frac{5}{\sqrt{100}} = (179 , 181) \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} (179.02 , 180.98) \\ \bar{x} = 180 , n = 100 , \sigma^2 = 25 \rightarrow \sigma = 5 , \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

مثال۴: از جامعه‌ای با توزیع غیرنرمال، نمونه‌ای متشکل از $n = 25$ مشاهده با میانگین $\bar{X} = 100$ و انحراف معیار $\sigma = 25$ تهیه شده است. فاصله اطمینان 0.95 برای میانگین جامعه (μ) برابر است با: (اقتصاد۷۳)

۱) 100 ± 4.47 ۲) 100 ± 20 ۳) $100 \pm 4.47 \frac{25}{25}$ ۴) $100 \pm 4.47(5)$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جامعه غیرنرمال، واریانس معلوم و $n \leq 30$ است پس بنابر مورد هـ (قضیه چی‌بی‌شف) داریم:

$$\begin{cases} \mu : \bar{x} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm \sqrt{\frac{1}{0.05}} \times \frac{25}{\sqrt{25}} = 100 \pm 4.47 (5) \\ \bar{x} = 100 , \sigma = 25 , n = 25 , \alpha = 0.05 \end{cases}$$

مثال۵: نمونه‌ای تصادفی از قیمت کالایی در 49 فروشگاه تهران دارای میانگین 150 و انحراف معیار 14 تومان بوده است. میانگین قیمت این کالا با ضریب اطمینان 0.95 در چه فاصله‌ای قرار می‌گیرد؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) $148.08 - 151.92$ ۲) $148.08 - 157.92$ ۳) $146.08 - 153.92$ ۴) $121.08 - 177.92$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

جامعه غیرنرمال، واریانس نامعلوم و $n > 30$ است چون هیچ آماره‌ای برای توزیع $\bar{x}$ با این شرایط وجود ندارد به ناچار جامعه را نرمال فرض کرده و بنابر مورد ب داریم:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 150 \pm 2 \frac{14}{\sqrt{49}} = (146 , 154) \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} (146.08 , 153.92) \\ \bar{x} = 150 , s = 14 , n = 49 , \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

• محاسبه دقت یا خطا (e)

در برآورد فاصله برای میانگین جامعه دقت یا خطا عبارتست از:

$$\boxed{e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

در رابطه بالا در حالات مختلف به جای $z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ و همین طور در صورت مجهول بودن σ از S استفاده می‌شود.

مثال ۱: کمیت تصادفی X برطبق قانون نرمال با واریانس $\sigma^2 = 16$ توزیع شده است، برای ارزیابی پارامتر μ نمونه‌ای به حجم $n =$ 64 انتخاب و تخمین امیدریاضی $\bar{X} = 120$ به دست آمده است، حداکثر خطای حدی (ε) با احتمال 0.95 چقدر است؟ (اقتصاد ۷۱)

۱) 2.58 ۲) 1.9 ۳) 0.98 ۴) 1.98

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال و واریانس معلوم و $n \geq 1$ است بنابر مورد الف داریم:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm \underbrace{z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{خطا}}$$

$$\begin{cases} (\text{خطا})\, e = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{64}} = 1 \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} 0.98 \\ n = 64, \sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4 \,,\, \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

مثال ۲: اگر تعداد نمونه $n = 5$، میانگین و انحراف معیار نمونه به ترتیب 50 و 1.581 باشد، و جامعه آماری نرمال باشد، مقدار خطای نمونه‌گیری (ε) در برآورد میانگین جامعه کدام است؟ (حسابداری ۸۲)

(راهنمایی: $t_{0.025} = 2.776$ و $Z_{0.025} = 1.96$)

۱) 1.39 ۲) 1.96 ۳) 4.38 ۴) 6.21

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال، واریانس نامعلوم و $n < 30$ است. بنابر مورد ج داریم:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm \underbrace{t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \frac{s}{\sqrt{n}}}_{\text{خطا}}$$

$$\begin{cases} (\text{خطا})\, e = t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.776 \times \frac{1.581}{\sqrt{5}} = 1.96 \\ n = 5 \,,\, s = -1.581 \,,\, t_{0.025} = 2.776 \end{cases}$$

● محاسبه طول فاصله (2e)

برای محاسبه طول فاصله در برآورد فاصله میانگین جامعه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{فاصله اطمینان} = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\text{طول فاصله} = \left(\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2 Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2e$$

$$\boxed{\text{طول فاصله} = 2e = 2\, Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

در رابطه بالا در حالات مختلف به جای $z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ ، $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ و همین‌طور در مواردی که σ مجهول باشد از S استفاده می‌شود.

نکته۱: رابطهٔ بین n و تعداد نمونه با e (دقت یا خطا) و 2 e (طول فاصله) معکوس می‌باشد به طوری‌که:

$$\boxed{2e \sim e \sim \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

نکته۲: هر چقدر طول فاصله (2e) بیشتر شود دقت برآورد کمتر شده و خطا (e) بیشتر می‌شود.

نکته۳: هر چقدر تعداد نمونه (n) بیشتر شود، خطا (e) و درنتیجه طول فاصله (2e) کمتر شده و لذا دقت برآورد بیشتر می‌شود.

نکته۴: با افزایش مقدار $z_{\frac{\alpha}{2}}$ یا $t_{\frac{\alpha}{2}}$ طول فاصله و همین‌طور خطا بیشتر می‌شود. $t_{\frac{\alpha}{2}}$ یا $2e \sim e \sim z_{\frac{\alpha}{2}}$

مثال۱: اگر حجم نمونه به $\frac{1}{4}$ تقلیل یابد. طول فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصد میانگین جامعه:(اقتصاد ۷۴)

۱) در صورت عدم تغیر دیگر شرایط 4 برابر می‌شود.

۲) $4\overline{X}$ افزایش می‌یابد.

۳) نصف می‌شود.

۴) در صورت عدم تغییر انحراف معیار نمونه S_x، دوبرابر می‌شود

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\text{طول فاصله} = 2e = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \frac{n}{4}} 2e = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \to 2e = 2\left(2z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

می‌بینیم که اگر n به $\frac{n}{4}$ تبدیل شود طول فاصله 2 برابر می‌شود البته در صورتی‌که مقدار σ یا s ثابت باشد.

مثال۲: کدام‌یک از موارد زیر در مورد فاصله اطمینان یک پارامتر آماری مصداق ندارد؟ هر قدر .....، طول فاصله اطمینان کم‌تر می‌شود؟(اقتصاد ۸۰)

۱) حجم نمونه بیش‌تر باشد.

۲) واریانس تخمین‌زننده نقطه‌ای کم‌تر شود.

۳) واریانس جامعه آماری کم‌تر شود.

۴) ضریب اطمینان بالاتر رود.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

طول فاصله با σ و $z_{\frac{\alpha}{2}}$ رابطه مستقیم و با n رابطه معکوس دارد.

$$\text{طول فاصله} = 2e = 2z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین در شرایط زیر طول فاصله کم می‌شود:

۱ـ حجم نمونه (n) افزایش یابد.

۲ـ واریانس جامعه یا تخمین آن واریانس نمونه کمتر شود.

۳ـ ضریب اطمینان $(1-\alpha)$ کمتر شود و یا α (سطح خطا) بیشتر شود که در دو صورت $z_{\frac{\alpha}{2}}$ کمتر شود.

مثال۳: در ساختن فاصله اطمینان برای میانگین، اگر حجم نمونه افزایش پیداکند، کدام عبارت درست است؟(اقتصاد ۸۱)

۱) طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد.

۲) طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد.

۳) طول فاصله اطمینان بدون تغییر می‌ماند.

۴) واریانس نمونه‌ای، S^2، افزایش می‌یابد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همانطورکه قبلاً هم گفته شد طول فاصله $\left(2e = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ با حجم نمونه (n) رابطه معکوس دارد.

بنابراین با افزایش حجم نمونه طول فاصله کاهش می‌یابد.

● محاسبه تعداد نمونه (n)

در برآورد فاصله برای میانگین جامعه تعداد نمونه باتوجه به مقدار e برابر است با:

$$e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow e^2 = Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \sigma^2}{e^2}}$$

در رابطهٔ بالا در حالات مختلف به جای $z_{\frac{\alpha}{2}}$ از $t_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ و همین‌طور در صورت مجهول بودن σ از S استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: اگر بخواهیم نرخ بیکاری را در سطح معنی‌دار بودن $\alpha = 0.05$ و حداکثر حاشیه خطای $e = 0.01$ برآورد کنیم، حجم نمونه لازم با فرض $\sigma^2 = 0.25$ چقدر بایستی باشد (برای متغیر نرمال استاندارد z داریم: $p(z>1.96) = 0.025$) (اقتصاد ۸۴)

۱) 49 ۲) 4900 ۳) 9604 ۴) 38416

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.01 = 2\frac{0.5}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 100 \rightarrow n = 10000 \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} n = 9604 \\ e = 0.01 , \sigma^2 = 0.25 \rightarrow \sigma = 0.5 , \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

مثال ۲: به منظور برآورد میانگین یک جامعهٔ نرمال با واریانس 4، در نظر است یک نمونه تصادفی انتخاب گردد. اگر دقت برآورد 0.4 باشد، حجم نمونه تحقیق در سطح خطای 5% ، کدام است؟(حسابداری ۸۱)

۱) 94 ۲) 97 ۳) 100 ۴) 103

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.4 = 2 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 10 \rightarrow n = 100 \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} n = 97 \\ e = 0.4 , \sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2 , \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۲ـ برآورد فاصله برای تفاضل میانگین دو جامعه $(\mu_1 - \mu_2)$

فرض کنید دو جامعه نرمال با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 وجود داشته باشند، و نمونه‌هائی مستقل به تعداد n_1 از جامعه اول و n_2 از جامعه دوم انتخاب کنیم، برای تعیین فاصله اطمینان برای اختلاف میانگین دو جامعه، آمارهٔ نااریب $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ با کمترین واریانس بهترین انتخاب خواهد بود، بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} E(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) &= \mu_1 - \mu_2 \\ \sigma^2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \text{تابع محوری} = z \text{ یا } t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

در این حالت فاصله اطمینان به صورت $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm e$ بوده و باتوجه به حالات مختلف به صورت زیر بررسی می‌شود.

الف) دو جامعه نرمال و σ_1^2 و σ_2^2 معلوم

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ب) دو جامعه نرمال و σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم و $n_2 > 30 , n_1 > 30$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

ج) دو جامعه نرمال و σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم و $n_2 \le 30 , n_1 \le 30$ یا $(n_1 + n_2 \le 30)$

۱) با فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (برابری واریانس دو جامعه)

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha/2} \times S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\text{واریانس ترکیبی} = S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$\text{درجه آزادی} = n_1 + n_2 - 2$$

۲) با فرض $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (عدم برابری واریانس دو جامعه)

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{r, \alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$\text{درجه آزادی} = r = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

- **محاسبه e:**

مقدار خطا یا دقت در فاصله اطمینان مربوط به $\mu_1 - \mu_2$ عبارتست از:

$$e = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \quad \text{یا} \quad e = t_{r,\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \quad \text{یا} \quad e = t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}} \times S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

و طول فاصله برابر 2e خواهد بود.

نکته: برای برآورد فاصله $\bar{X}_1 + \bar{X}_2$ مانند $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ عمل کرده و برآورد فاصله به صورت:

$$(\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \quad \text{یا} \quad (\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \times S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \quad \text{یا} \quad (\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm t_{r,\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

مثال: وزن مسافران و بار همراه آنان در یک پرواز دارای توزیع نرمال است. براساس اطلاعات در مورد میانگین و واریانس از یک نمونه تصادفی n_1 تایی از وزن مسافران و یک نمونه تصادفی n_2 تایی مستقل از بار مسافران، فاصله اطمینان $(1-\alpha)$ درصد برای مجموع میانگین وزن مسافر و بار همراه وی $(\mu_1+\mu_2)$ کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $(\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

۲) $(\mu_1+\mu_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

۳) $(\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},(n_1+n_2-2)} s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

۴) $(\bar{x}_1+\bar{x}_2) \pm t_{\frac{\alpha}{2},r}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

توزیع جامعه‌ها نرمال است و چون از واریانس جامعه‌ها چیزی نگفته ما پیش فرض آن‌ها را نامعلوم می‌دانیم و همچنین از تعداد نمونه‌ها صحبتی نشده پیش فرض آن‌ها را کمتر از 30 می‌دانیم فقط توجه به یک نکته ضروری است استفاده از مورد ج ـ ۱ یعنی $t_{n_1+n_2-2}$ در صورتی صحیح است که واریانس جوامع برابر باشد $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ اما در این سوال یکسان بودن واریانس دو جامعه ذکر نشده بنابراین واریانس‌های جوامع را مخالف هم می‌دانیم $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ و از مورد ج ـ۲ یعنی t_r استفاده می‌کنیم. اگر $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ذکر می‌شد گزینه ۳ صحیح می‌بود.

۳ـ برآورد فاصله‌ای برای نسبت جامعه (p)

برای تخمین نسبت یا نرخ موفقیت در جامعه‌ای با انتخاب نمونه‌ای nتائی در صورتیکه x موفقیت مشاهده شود، رابطه $\bar{p} = \frac{x}{n}$ را نسبت نمونه در نظر می‌گیریم. توزیع $\bar{p}$ همان‌طور که در بحث نمونه گیری مطرح شد، در نمونه‌های بزرگ نرمال است بنابراین:

$$\text{تابع محوری} = z = \frac{\bar{p}-p}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

فاصله اطمینان عبارت است از:

$$\bar{p} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \rightarrow \left(\bar{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \ , \bar{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \right)$$

$$\bar{p} = \frac{x}{n}$$

مثال: معاون اداری مالی دانشگاهی براساس یک نمونه تصادفی 100 تایی از دانشجویان مشاهده کرده است که 80 نفر از آن‌ها از کمک هزینه تحصیلی استفاده می‌کنند. فاصله اطمینان 90 درصدی نسبت واقعی دانشجویانی که از کمک هزینه تحصیلی استفاده می‌کنند، کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) 0.8 ± 0.0656 ۲) 0.8 ± 0.0784 ۳) 0.8 ± 0.0520 ۴) 0.8 ± 0.0822

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \bar{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{pq}{n}} = 0.8 \pm 1.64 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} = 0.8 \pm 0.0656 \\ n = 100, \ x = 80 \\ \bar{p} = \frac{x}{n} = \frac{80}{100} = 0.8 \ , \alpha = 0.1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \rightarrow z_{0.05} = 1.64 \end{cases}$$

● محاسبه دقت یا خطا (e)

در برآورد فاصله برای نسبت جامعه دقت یا خطا عبارتست از:

$$e = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

مثال: به منظور ارزیابی کیفیت محصولات تولید شده، تعداد 200 واحد محصول را به طور تصادفی انتخاب کرده‌ایم که بین آن‌ها 40 محصول نقص‌دار مشاهده شده است. دقت تخمین (یا خطای حدی) در سطح احتمال 0.95 کدام است؟ (اقتصاد۷۲)

۱) 0.0554 ۲) 0.1025 ۳) 0.0046 ۴) 0.55

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} = 2 \times \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{200}} = 0.0565 \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} 0.0554 \\ \bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{40}{200} = 0.2 \ , \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \ , z_{0.025} \simeq 2 \\ n = 200 \ , \ x = 40 \ \text{(تعداد افراد دارای صفت موردنظر)} \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

● محاسبه تعداد نمونه (n)

در برآورد فاصله برای نسبت جامعه، تعداد نمونه باتوجه به مقدار e برابر است با:

$$e = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \rightarrow e^2 = Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\bar{p}\bar{q}}{n} \longrightarrow \boxed{n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\bar{p}\bar{q}}{e^2}}$$

مثال ۱: اگر بخواهیم نرخ بیکاری در جامعه را در سطح معنی‌دار 5% با حداکثر خطای تخمین 1% برآورد کنیم، حجم نمونه انتخابی چقدر باشد؟ $\left(Z_{\%25} = 2\right)$ (اقتصاد ۷۳)

۱) 1000 ۲) 10000 ۳) 20000 ۴) 100000

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

چون هیچ اطلاعاتی از نسبت (نرخ بیکاری) نداریم p و q را پیش‌فرض برابر $\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow 0.01 = 2\times\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 100 \rightarrow n = 10000 \\ e = 0.01\,, \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2\,,\ p = q = \frac{1}{2} \quad \text{پیش فرض} \end{cases}$$

مثال ۲: حداقل حجم نمونه مناسب برای تخمین نسبت افرادی که در انتخابات آینده شرکت می‌کنند با خطای 2 درصد و ضریب اطمینان 0.95 تقریباً چقدر است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) 2500 ۲) 5000 ۳) 7500 ۴) 10000

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow 0.02 = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 50 \rightarrow n = 2500 \\ e = 0.02\,, \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2\,,\ p = q = \frac{1}{2} \quad \text{پیش‌فرض} \end{cases}$$

● محاسبه طول فاصله (2e)

برای محاسبه طول فاصله در برآورد فاصله‌ای نسبت جامعه، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\text{فاصله اطمینان} = \left(\bar{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\,,\ \bar{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\right)$$

$$\text{طول فاصله} = \left(\bar{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\right) - \left(\bar{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}\right) = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} = 2e$$

$$\boxed{\text{طول فاصله} = 2e = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته۱: رابطه بین n (تعداد نمونه) با e (دقت یا خطا) و 2e (طول فاصله) معکوس می‌باشد به طوری‌که:

$$2e \sim e \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

نکته۲: هر چقدر طول فاصله اطمینان بیشتر شود دقت برآورد کمتر شده و خطا (e) بیشتر می‌شود.

نکته۳: هر چقدر تعداد نمونه (n) بیشتر شود خطا (e) و درنتیجه طول فاصله کمتر شده لذا دقت برآورد بیشتر می‌شود.

نکته۴: در صورتیکه در محاسبه خطا (e) و تعداد نمونه (n) هیچ اطلاعی از نسبت جامعه p نباشد از $\bar{p}$ استفاده می‌کنیم و در صورتیکه از $\bar{p}$ نیز هیچ اطلاعی نداشته باشیم از $\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم.

نکته۵: با افزایش مقدار $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ طول فاصله و همین‌طور خطا بیشتر می‌شود. $2e \sim e \sim z_{\frac{\alpha}{2}}$

۴ـ برآورد فاصله برای تفاضل نسبت در دو جامعه $(p_1 - p_2)$

در صورتیکه دو جامعه میانگین‌پذیر باشند از تخمین $\mu_1 - \mu_2$ برای مقایسه آن‌ها استفاده می‌کنند، اما در صورتیکه داده‌ها کیفی باشند باید از مقایسه نسبت موفقیت در دو جامعه استفاده کرد.

اگر x_1 موفقیت از یک نمونه n_1تائی از جامعه اول و x_2 موفقیت از یک نمونه n_2تائی از جامعه دوم را در نظر بگیریم، آنگاه $\bar{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ و $\bar{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ به ترتیب نسبت نمونه در هر یک از دو جامعه می‌باشد، با فرض:

۱) مستقل بودن نمونه‌ها در دو جامعه

۲) انتخاب نمونه‌های بزرگ

توزیع $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)$ نرمال خواهد بود. بنابراین:

$$E(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = p_1 - p_2$$

$$\sigma^2(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2} \longrightarrow \text{تابع محوری} = z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}}$$

و فاصله اطمینان عبارتست از:

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

● محاسبه مقدار خطا یا دقت (e)

مقدار خطا در برآورد فاصله‌ای تفاضل نسبت دو جامعه عبارتست از:

$$e = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

• طول فاصله (2e)

همان‌طور که در برآورد فاصله نسبت دیده شد، طول فاصله به صورت زیر مطرح می‌شود:

$$2e = 2z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}$$

مثال: اگر در دو جامعه تخمین‌های $\hat{p}_1 = 0.5$ و $\hat{p}_2 = 0.69$ باشد، فاصله اطمینان 99% برای تفاوت نسبت دو جامعه کدام است؟ به فرض این که حجم نمونه‌ها یکسان و برابر با $n_1 = n_2 = 300$ در نظر گرفته شوند. (مدیریت ۷۵)

۱) (-0.0868 و -0.2932) ۲) (-0.086 و -0.3952) ۳) (0.0865 ـ و 0.3952 −) ۴) (0.089 ـ و 0.2932 −)

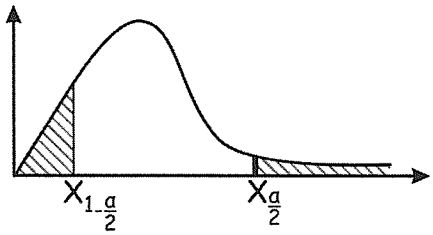
حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} p_1 - p_2 : (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1}+\frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}} \\ p_1 - p_2 : (0.5-0.69) \pm 2.58\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{300}+\frac{(0.69)(0.31)}{300}} = -0.19 \pm 0.1032 = (-0.2932, -0.0868) \\ p_1 = 0.5, p_2 = 0.69, n_1 = n_2 = 300, \alpha = 0.01 \rightarrow z_{0.005} = 2.58 \end{cases}$$

۵ ـ برآورد فاصله‌ای برای واریانس جامعه (σ^2)

در صورتیکه S^2 واریانس یک نمونه n تائی از جامعه‌ای نرمال با واریانس σ^2 باشد، تعیین فاصله اطمینان برای برآورد واریانس جامعه (σ^2) بر مبنای توزیع نمونه گیری $\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (تابع محوری) خواهد بود بنابراین:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \longrightarrow \sigma^2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}}$$



و برآورد فاصله‌ای عبارتست از:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال: فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای واریانس جامعه‌ای با توزیع نرمال چیست؟ (α برای دنباله راست توزیع تعریف شده است.)(اقتصاد ۸۵)

۱) $\dfrac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2} < \sigma^2 < \dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2}$

۲) $\dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2} < \sigma^2 < \dfrac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2}$

۳) $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۴) $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که می‌دانیم در جامعه نرمال با پارامترهای نامعلوم داریم: $\chi^2_{(n-1)} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

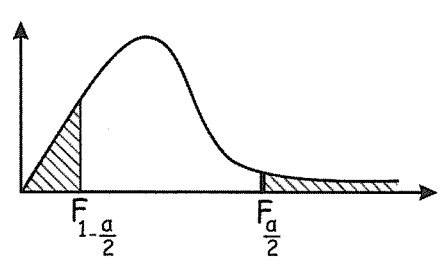
با توجه به این‌که توزیع χ^2 چوله به راست است و α برای دنباله راست توزیع تعریف شده $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ سمت راست و عدد بزرگ‌تری است و در مخرج حد پائین قرار می‌گیرد. اگر α را برای دنباله چپ تعریف می‌کرد گزینه ۳ درست می‌بود. $\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۶ـ برآورد فاصله‌ای برای نسبت واریانس‌های دو جامعه $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

یکی از راه‌های مقایسه واریانس‌های دو جامعه تشکیل نسبت $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ است که اگر دو واریانس با هم مساوی باشد، نسبت مذکور برابر 1 خواهد شد.

در صورتیکه S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس‌های نمونه از نمونه‌های مستقل از هم با اندازه‌های n_1 , n_2 از دو جامعه نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 باشند، تعیین فاصله اطمینان برای برآورد نسبت واریانس‌های دو جامعه $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ بر مبنای توزیع $F_{n_1-1,n_2-1} = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$ (تابع محوری) خواهد بود بنابراین:

$$F_{n_1-1,n_2-1} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \longrightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{F} \times \frac{S_1^2}{S_2^2}$$



در نتیجه فاصله اطمینان عبارتست از:

$$\left[\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\ ,\ \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]$$

باتوجه به آن‌که $F_{\alpha,m,n}=\frac{1}{F_{1-\alpha,n,m}}$، فاصله اطمینان می‌تواند به صورت زیر نیز بیان شود.

$$\left[F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\ ,\ F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}\times\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]$$

مثال: فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای نسبت واریانس دو جامعه با فرض نرمال بودن جوامع عبارتست از: (اقتصاد۸۴)

۱) $\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

۲) $\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

۳) $\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$

۴) $\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که:

$$F_{n_1-1,n_2-1}=\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}\ \rightarrow\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\frac{1}{F}\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

پیش فرض α را برای دنباله راست توزیع می‌دانیم بنابراین $F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$ سمت راست است و مقدار بیشتری دارد پس در مخرج حد پائین قرار می‌گیرد. بنابراین:

$$1)\ \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$$

اما با توجه به نکته $F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}}$ سه فاصله زیر نیز درست است.

2) $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

3) $\frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}}$

4) $\frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{1-\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2}.F_{\frac{\alpha}{2},n_2-1,n_1-1}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

فصل ششم

آزمون فرض

❍ آزمون فرض آماری

تعریف: به طور کلی هدف آزمون فرض آماری، تعیین این موضوع است که با توجه به اطلاعات به دست آمده از داده‌های نمونه، حدسی که دربارهٔ خصوصیتی از جامعه می‌زنیم به طور قوی تأیید می‌شود یا خیر. این حدس بنا به هدف تحقیق شامل ادعائی دربارهٔ مقدار یک پارامتر جامعه است.

نکته۱: هر حکمی دربارهٔ جامعه را یک فرض آماری می‌نامیم که قابل قبول بودن آن باید برمبنای اطلاعات حاصل از نمونه‌گیری از جامعه بررسی شود.

نکته۲: چون ادعا ممکن است صحیح یا غلط باشد بنابراین دو فرض مکمل در ذهن به‌وجود می‌آید: فرض اول: (ادعا صحیح است) ; فرض دوم: (ادعا غلط است)

❍ فرض صفر و فرض مقابل

فرض صفر (H_0)**:** به فرضی که باید آن را اثبات کنیم و در آن علامت = وجود دارد.

فرض مقابل (H_1)**:** به فرض مخالف H_0، گفته می‌شود که در صورت عدم اثبات H_0، پذیرفته می‌شود.

نکته :

۱ـ همیشه باید فرض H_0 را اثبات کنیم و در صورت رد آن H_1 را بپذیریم.

۲ـ ادعا ممکن است در H_0 باشد یا در H_1 باشد.

مثال۱: ادعا شده است که پراکندگی جامعهٔ A از پراکندگی جامعهٔ B کمتر است فرض H_0 کدام است؟

۱) $H_0 : \sigma_A^2 < \sigma_B^2$ ۲) $H_0 : \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$ ۳) $H_0 : \sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$ ۴) $H_0 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

دیده می‌شود که ادعا در H_1 بوده و در H_0 نیست زیرا ادعا شامل مساوی (=) نشده است.

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 \geq \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_B^2 \end{cases}$$

مثال۲: کارخانه‌داری ادعا کرده است حداقل 20% تولیداتش معیوب است، فرض H_1 کدام است؟

دیده می‌شود که ادعا در H_0 بوده و در H_1 نیست زیرا ادعا شامل مساوی (=) شده است.

$$\begin{cases} H_0 : p \geq \%20 \\ H_1 : p < \%20 \end{cases}$$

مثال۳: فروشنده‌ای ادعا کرده است که بیش از 60 درصد تولیدات او حداقل 20 سال عمر می‌کند. فرضیه‌های آماری برای آزمون ادعا کدام است؟ (مدیریت ۷۳)

۱) $\begin{cases} H_0 : \hat{p} \geq \%60 \\ H_1 : \hat{p} \leq \%60 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} H_0 : \hat{p} \leq \%60 \\ H_1 : \hat{p} > \%60 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} H_0 : \hat{p} \geq \%60 \\ H_1 : \hat{p} < \%60 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} H_0 : \hat{p} < \%60 \\ H_1 : \hat{p} \geq \%60 \end{cases}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال۴: اگر ادعایی به صورت « میانگین جامعه آماری بیش از 10 است» بیان شود، فرضیه صفر کدام است؟ (حسابداری ۷۹)

۱) $H_0 : \mu < 10$ ۲) $H_0 : \mu > 10$ ۳) $H_0 : \mu \leq 10$ ۴) $H_0 : \mu \geq 10$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال۵: ادعا شده است که ریسک شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران کم‌تر از 1000 ریال است. فرضیه صفر آماری کدام است؟ (حسابداری ۸۱)

۱) $H_0 : \sigma_x^2 \leq 1000$ ۲) $H_0 : \sigma_x = 1000$ ۳) $H_0 : \sigma_x \geq 1000$ ۴) $H_0 : \sigma_x^2 < 1000$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال۶: کدام عبارت در مورد H_0 و H_1 صحیح نیست؟ (حسابداری ۸۲)

۱) H_0 و H_1 نقیض یکدیگرند.
۲) همواره ادعا در H_1 قرار می‌گیرد.
۳) در H_0 همواره باید = یا ≤ یا ≥ قرار گیرد.
۴) فرض بر درستی H_0 است مگر خلاف آن ثابت شود.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

○ سطح معنی‌دار و خطاهای آماری

هدف از هر آزمون فرض آماری این است که با استفاده از نتایج حاصل از نمونه‌گیری و همچنین مجموعه‌ای از قواعد بتوانیم تصمیم بگیریم که آیا فرض H_0 را بپذیریم یا آن را رد کنیم (یعنی H_1 را بپذیریم)

روش کار این است که ابتدا نمونه‌ای از جامعه گرفته شده سپس باتوجه به نوع فرض (برابری میانگین دو جامعه ـ برابری نسبت دو جامعه ـ ...) آماره (ملاک) مناسبی برای فرض انتخاب می‌کنیم و براساس نتایج حاصل از نمونه مقدار آن را محاسبه می‌کنیم بعد از آن با توجه به سطح اطمینان مشخص شده برای قبول H_0 که $(1-\alpha)\%$ می‌باشد، **ناحیه $\alpha\%$ ناحیه رد فرض H_0 می‌باشد که به آن ناحیه بحرانی یا سطح معنی‌دار می‌گویند.** در صورتیکه ملاک محاسبه شده (U) در ناحیه اطمینان قرار گیرد فرض H_0 را نمی‌توان رد کرد در غیر این صورت در شرایطی که ملاک آزمون در ناحیه بحرانی قرار گیرد فرض H_0 رد و فرض H_1 پذیرفته می‌شود.

مثال: سطح زیر منحنی مربوط به تابع نمونه‌ای (آماره) آزمون فرضیه H_0 در آزمون فرضیه آماری همواره برابر است با: (مدیریت ۷۳)

۱) درصد اطمینان آزمون فرضیه
۲) خطای نوع اول (α)
۳) خطای نوع دوم (β)
۴) بستگی به تعریف H_0 دارد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

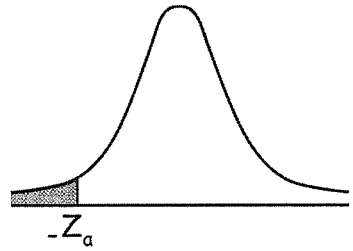
○ انواع آزمون‌های آماری با توجه به فرض‌ها:

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱) آزمون یک دامنه

الف) آزمون دامنه به چپ:

در صورتیکه فرض آزمون به صورت $\begin{cases} H_0: & \theta \geq \theta_0 \\ H_1: & \theta < \theta_0 \end{cases}$ باشد، آزمون دامنه به چپ بوده و ناحیه بحرانی (معنی‌دار) و ناحیه اطمینان به طور مثال برای توزیع z به صورت زیر خواهد بود:

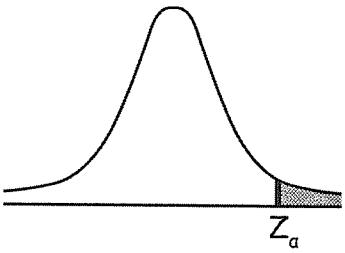


ملاک آزمون $= U > -z_\alpha \longrightarrow$ فرض H_0 پذیرفته می‌شود

ملاک آزمون $= U < -z_\alpha \longrightarrow$ فرض H_0 رد می‌شود.

ب) آزمون دامنه به سمت راست:

در صورتیکه فرض آزمون به صورت $\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$ باشد آزمون دامنه به راست بوده و ناحیه بحرانی (معنی‌دار) و ناحیه اطمینان به طور مثال برای توزیع z به صورت زیر خواهد بود:

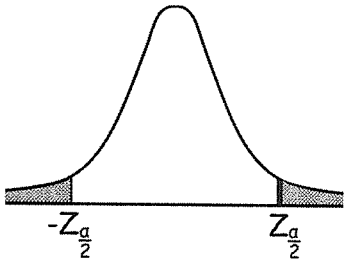


فرض H_0 پذیرفته می‌شود $\longrightarrow$ $U < z_\alpha$ = ملاک آزمون

فرض H_0 رد می‌شود. $\longrightarrow$ $U > z_\alpha$ = ملاک آزمون

۲) آزمون دو دامنه:

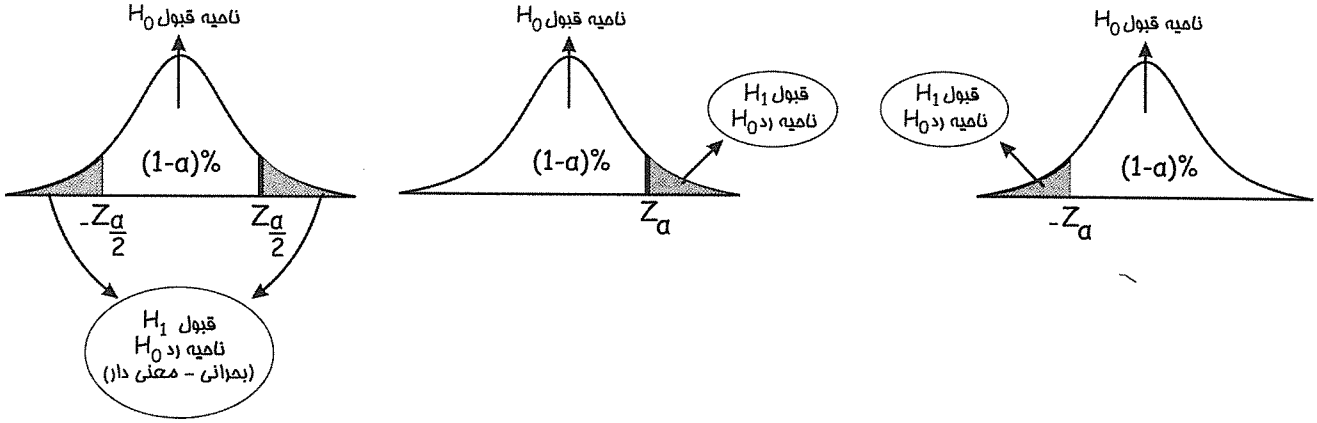
در صورتیکه فرض آزمون به صورت $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$ باشد، آزمون دو دامنه بوده و ناحیه بحرانی (معنی‌دار) و ناحیه اطمینان به طور مثال برای توزیع z به صورت زیر خواهد بود:



فرض H_0 پذیرفته می‌شود $\longrightarrow$ $-z_{\frac{\alpha}{2}} <$ ملاک آزمون $= U < -z_{\frac{\alpha}{2}}$

فرض H_0 رد می‌شود. $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} U > z_{\frac{\alpha}{2}} = \text{ملاک آزمون} \\ U < -z_{\frac{\alpha}{2}} = \text{ملاک آزمون} \end{array}\right\}$

$\alpha = 0.01$, 0.05 , 0.10 مقادیر موسوم می‌باشند برای سطوح اطمینان 0.99 , 0.95 , 0.90



آزمون یک دامنه	آزمون یک دامنه	آزمون دو دامنه
دامنه به چپ $\begin{cases} H_0 : \theta \geq \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$	دامنه به راست $\begin{cases} H_0 : \theta \leq \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$

○ خطاهای نوع اول α و دوم β:

هنگام اتخاذ تصمیم در مورد H_0 ممکن است دو نوع خطا پیش آید:

۱ـ α (خطای نوع اول): احتمال رد کردن H_0 وقتی H_0 درست است یا احتمال رد کردن H_0 وقتی H_1 غلط است. به عبارتی:

$$\boxed{\alpha = P\ (\text{خطای نوع اول}) = P(H_0 \text{ رد کردن} \mid H_0 \text{ درست بودن}) = P(H_0 \text{ رد کردن} \mid H_1 \text{ غلط بودن})}$$

۲ـ β (خطای نوع دوم): احتمال قبول کردن یا رد نکردن فرض H_0 وقتی H_0 غلط است یا احتمال قبول کردن H_0 وقتی H_1 درست است. به عبارتی:

$$\beta = P\ (\text{خطای نوع دوم}) = P\,(H_0 \text{ قبول کردن} \mid H_0 \text{ غلط بودن}) = P\,(H_0 \text{ قبول کردن} \mid H_1 \text{ درست بودن})$$

● **نکات مهم در مورد α و β:**

۱ـ α و β باهم رابطه معکوس دارند. $(\alpha \uparrow \ \beta \downarrow)$

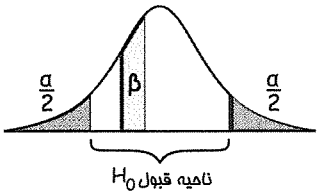
۲ـ $\alpha + \beta \neq 1$ لزوماً جمع احتمال α و β یک نمی‌شود.

۳ـ با افزایش n (نمونه) هر دو نوع خطای α و β کاهش پیدا می‌کند.

۴ـ سطح معنی‌دار همان مقدار خطای نوع اول است. (α) و ارتباط معکوس با خطا یا دقت (e) دارد.

۵ـ سطح زیر منحنی H_0 در آزمون فرض آماری همواره برابر سطح اطمینان آزمون است.

۶ـ احتمال β همیشه قسمتی از سطح اطمینان از قبول H_0 است زمانی که H_0 غلط است.



مثال ۱: با ثابت نگه‌داشتن اندازه نمونه، احتمال اشتباه نوع اول فقط در صورتی کاهش می‌یابد که: (مدیریت ۷۴)

۱) طول ناحیهٔ رد H_0 افزایش یابد.
۲) طول ناحیهٔ پذیرش H_0 کاهش یابد.
۳) احتمال خطای نوع دوم افزایش یابد.
۴) احتمال خطای نوع دوم کاهش یابد.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲: احتمال خطای نوع اول و احتمال خطای نوع دوم: (مدیریت ۷۵)

۱) با یکدیگر رابطه معکوس دارند.
۲) مجموعشان بیش‌تر از یک است.
۳) مجموعشان مساوی با یک است.
۴) مساویند.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۳: رابطه بین خطای نوع اول (α) و دقت برآورد در ساختن یک فاصله اطمینان چگونه است؟ (حسابداری ۸۰)

۱) خطی
۲) معکوس
۳) مستقیم
۴) خطی مستقیم

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

منظور از دقت برآورد همان خطا (e) است.

مثال۴: در آزمون فرضیه، افزایش خطای نوع اول به شرط ثابت بودن سایر عوامل، موجب می‌شود که: (اقتصاد ۷۳)

۱) توان آزمون افزایش یابد.
۲) خطای نوع دوم افزایش یابد.
۳) توان آزمون کاهش یابد.
۴) خطای نوع دوم ثابت باقی بماند.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

براساس نکات گفته شده در مورد خطاها داریم: α (احتمال خطای نوع اول) و β (احتمال خطای نوع دوم) با هم رابطه معکوس دارند. پس به شرط ثابت بودن سایر عوامل در صورتی که خطای نوع اول افزایش یابد خطای نوع دوم کاهش می‌یابد و چون توان آزمون برابر است با: $\beta^* = 1 - \beta$ در نتیجه با کاهش β، توان آزمون β^* افزایش می‌یابد. بنابراین α با توان آزمون (β^*) رابطه مستقیم دارد.

○ توان آزمون

در هر استنباط آماری احتمال وقوع یکی از این دو نوع خطا (α یا β) وجود دارد و لازم است آزمون‌کننده به نوعی تعادل بین این دو نوع خطا برسد. در رسیدن به این تعادل موضوع تابع توان آزمون مطرح می‌شود.

توان آزمون $= [1 - \beta] = [1 - P$ (قبول H_0 زمانی که H_0 غلط است)$] = P$ (رد H_0 وقتی H_0 به واقع غلط است)

در واقع زمانی که فرضی H_0 مورد قبول همیشه به واقع صحیح باشد $\beta = 0$ خواهد بود و $1 =$ توان آزمون خواهد بود.

نکته :آزمونی توانمند است که با توجه به مقدار مشخص از α دارای خطای نوع دوم (β) کمتری باشد.

مثال : توان آزمون (Power of the test) یعنی: (اقتصاد ۷۵)

۱) احتمال پذیرش فرضیهٔ نادرست.
۲) احتمال رد فرضیهٔ نادرست.
۳) احتمال پذیریش فرضیهٔ درست
۴) رد فرضیهٔ نادرست.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

توان آزمون: احتمال رد کردن فرض H_0 است وقتی H_0 به واقع غلط باشد.

$$\beta^* = 1 - \beta = p\ (H_0 \text{ رد} \mid \text{غلط } H_0) = p\ (H_1 \text{ قبول} \mid \text{درست } H_1) = P\ (H_0 \text{ رد} \mid \text{درست } H_1)$$

$$= P\ (H_1 \text{ قبول} \mid \text{نادرست } H_0)$$

توجه: در شرایط مساوی مثل این سؤال که هر دو گزینه ۱ و ۳ درست است گزینه ۱ را می‌پذیریم چون همیشه بحث ما روی رد کردن و رد نکردن فرض H_0 است به یاد داریم که همیشه به دنبال اثبات H_0 هستیم.

○ محاسبه خطای نوع اول (α) و نوع دوم (β)

الف ـ محاسبه خطای نوع اول (α)

در صورتی‌که یک آزمون در سطح اطمینان $(1-\alpha)\%$ انجام شود، در این‌صورت $(\alpha\%)$ احتمال خطای نوع اول می‌باشد که همان سطح بحرانی (ناحیه رد H_0) است.

مثال : با آزمون $H_0:\mu=\mu_0$ در سطح 95% احتمال خطای نوع اول کدام است؟

۱) 5% ۲) 95% ۳) 100% ۴) 2.5%

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ب ـ محاسبه خطای نوع دوم (β) و توان آزمون ($1-\beta$)

۱ ـ در صورتی‌که فرضیه آزمون به صورت $\begin{cases} H_0:\mu\ge\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} H_0:\mu\le\mu_0 \\ H_1:\mu>\mu_0 \end{cases}$ باشد. برای محاسبهٔ خطای نوع دوم (β) و توان $(1-\beta)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) ملاک آزمون $a=\dfrac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ را به دست آوریم.

۲) بعد از محاسبه ملاک a خطای نوع دوم (β) و توان $(1-\beta)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\boxed{\begin{aligned} &\beta=p\left(z<a+z_\alpha\right) \\ &1-\beta=1-p\left(z<a+z_\alpha\right) \end{aligned}}$$

مثال ۱: اگر میانگین واقعی مقدار نوشابه ریخته شده به درون شیشه‌ها در کارخانه‌ای 324 با انحراف معیار 12 سی‌سی باشد، خطای نوع دوم آزمون زیر براساس یک نمونه تصادفی 36 تائی با خطای نوع اول 2.5 درصد تقریباً کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

$\left(z_{0.025}=1.96\simeq 2\right)$

$$\begin{cases} H_0:\mu\ge 330 \\ H_1:\mu<330 \end{cases}$$

۱) 0.025 ۲) 0.16 ۳) 0.975 ۴) 0.84

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \beta=p\left(z<a+z_\alpha\right)=p(z<-3+2)=p(z<-1)=0.16 \\ a=\dfrac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{324-330}{\frac{12}{\sqrt{36}}}=-3 \\ \mu=324\ ,\ \mu_0=330\ ,\ n=36\ ,\ \sigma=12 \end{cases}$$

مثال۲: در آزمون معنی‌دار بودن، احتمال خطای نوع دوم (β) عبارت است از: (مدیریت ۷۰)

۱) پذیرش H_0، به شرط آن‌که آزمون فرضیه صحیح باشد.
۲) رد H_0،به شرط آن که آزمون فرضیه نادرست باشد.
۳) پذیرش H_0، به شرط آن‌که آزمون فرضیه نادرست باشد.
۴) رد H_0، به شرط آن که آزمون فرضیه صحیح باشد.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال۳: فرضیه صفر بیان می‌کند که « فرآیند جدید، به خوبی فرآیند قدیمی است» خطای نوع اول (α) به معنی آن است که نتیجه بگیریم: (مدیریت ۸۰)

۱) فرآیند قدیمی بهتر است، در حالی که چنین نیست.
۲) فرآیند جدید خوب است،در حالی که چنین هم هست.
۳) فرآیند قدیمی بهتر است، در حالی که چنین هم هست.
۴) فرآیند جدید به همان خوبی فرآیند قدیمی است در حالی که چنین نیست.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد. گزینه ۴ خطای نوع دوم (β) است.

❍ مراحل عمومی آزمون یک فرض آماری:

۱ـ تعریف فرض‌های آماری H_0 و H_1

۲ـ تعیین توزیع نمونه‌گیری آماره و نوع آماره آزمون (محاسبه با فرمول)

۳ـ تعیین سطح زیرمنحنی H_0 و H_1 و محاسبه مقدارهای بحرانی (با توجه به α از جدول محاسبه می‌شود)

۴ـ تصمیم‌گیری باتوجه به قرار گرفتن آماره به‌دست آمده در 2 در سطح اطمینان یا بحرانی به‌دست آمده در قسمت 3 (که از جدول به‌دست آمده است)

❍ آزمون فرض آماری میانگین جامعه:

۱ـ تشکیل فرض‌های آماری که به یکی از سه صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_x \le \mu_0 \\ H_1 : \mu_x > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu_x \ge \mu_0 \\ H_1 : \mu_x < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu_x = \mu_0 \\ H_1 : \mu_x \ne \mu_0 \end{cases}$$

۲ ـ آماره آزمون: توزیع $\bar{X}$ (Z یا t) خواهد بود.

الف) جامعه نرمال و σ معلوم باشد توزیع $\bar{x}$ صرف‌نظر از n (n دلخواه)

$$\boxed{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ب) جامعه نرمال و σ نامعلوم باشد $n > 30$، توزیع $\bar{x}$ نرمال است:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

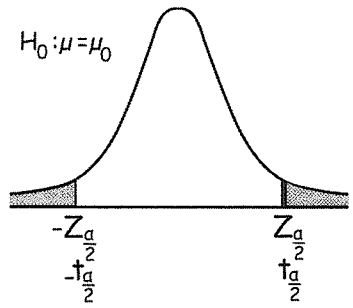
ج) جامعه نرمال و σ نامعلوم باشد و $n \le 30$ توزیع $\bar{x}$ t استیودنت است.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} \qquad S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

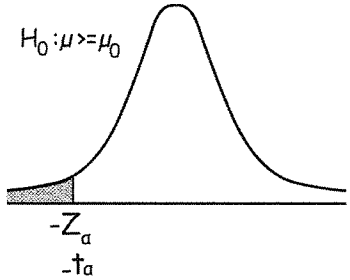
د) جامعه غیرنرمال (نامعلوم) و σ معلوم باشد و $n > 30$، توزیع $\bar{x}$ بنابر قضیه حد مرکزی نرمال است

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

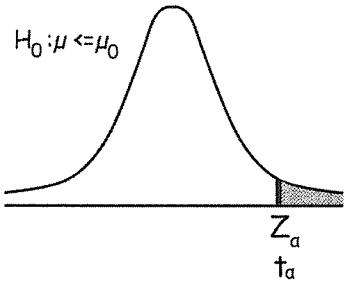
۳) مقدار بحرانی:



$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu_x \ne \mu_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{U > Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ یا } U < -Z_{\frac{\alpha}{2}}}$$



$$\begin{cases} H_0: \mu_x \ge \mu_0 \\ H_1: \mu_x < \mu_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{U < -Z_\alpha}$$



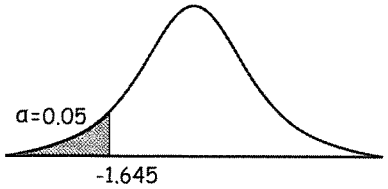
$$\begin{cases} H_0: \mu_x \le \mu_0 \\ H_1: \mu_x > \mu_0 \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{U > Z_\alpha}$$

۴ـ تصمیم گیری:

در این مرحله آماره به‌دست آمده از قسمت 2 را با مقادیر بحرانی به‌دست آمده از جدول مقایسه می‌کنیم اگر در ناحیه بحرانی قرار گرفت H_0 را رد و در غیراین‌صورت در صورت قرار گرفتن در ناحیه اطمینان فرض H_0 را می‌پذیریم.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال : ادعا شده است میانگین نمرهٔ مسئولیت‌پذیری در کشور دست کم 50 است. برای بررسی فرضیه یک نمونه 64 تایی گرفته شده که از بین مدیران کشور به طور تصادفی انتخاب شده است. که میانگین و انحراف معیار 45 و 16 به‌دست آمده در سطح خطای 5% صحت قضیه فوق را بررسی کنید؟



۱) فرض:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 50 \\ H_1 : \mu < 50 \end{cases}$$

۲) آماره آزمون

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{45 - 50}{\frac{16}{\sqrt{64}}} = -2.5$$

۳) مقادیر بحرانی

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = -1.645$$

۴) تصمیم‌گیری:

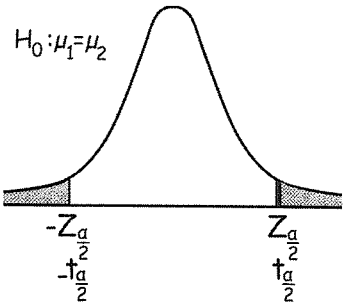
باتوجه به قرار گرفتن $Z = -2.5$ در ناحیه بحرانی فرض H_0 رد می‌شود.

❍ آزمون مقایسه میانگین دو جامعه آماری

فرضیه‌های مربوط به مقایسه دو جامعه آماری به «فرضیه‌های تطبیقی» معروف هستند، که از مراحل آزمون فرض آماری برای میانگین دو جامعه برای آن استفاده می‌کنیم.

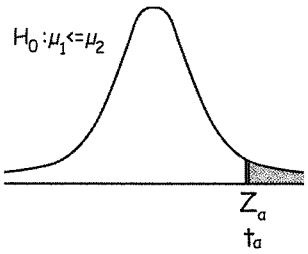
در صورتیکه نمونه n_1 از جامعه اول با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 مستقل از نمونه n_2 از جامعه دوم با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 انتخاب شود، خواهیم داشت:

۱ـ فرض‌های آماری:



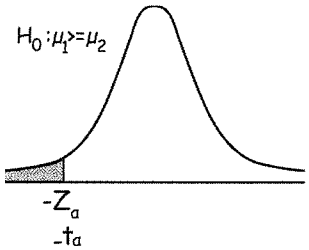
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{U > Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ یا } U < -Z_{\frac{\alpha}{2}}}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت



$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \le \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \xrightarrow{U>Z_\alpha}$$

فرض H_0 رد می‌شود.



$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \ge \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \xrightarrow{U<-Z_\alpha}$$

فرض H_0 رد می‌شود.

۲ـ آماره آزمون:

با فرض آن‌که می‌دانیم آماره $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ برای $\mu_1 - \mu_2$ نااریب باشد آماره آزمون عبارتست از:

الف) وقتی نمونه‌ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار (σ) معلوم انتخاب شوند،توزیع $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ نرمال بوده و

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

که با فرض $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}$$

ب) وقتی نمونه‌ها از دو جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم انتخاب شوند، دو وضعیت متفاوت به‌وجود می‌آید:

a) $n_1 > 30$ و $n_2 > 30$: در این وضعیت آماره بازهم Z خواهد بود.

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{H_0:\mu_1=\mu_2} \boxed{Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}}}$$

b) $n_2 \le 30 , n_1 \le 30$ $(n_1 + n_2 \le 30)$: در این وضعیت آماره t خواهد بود که در این حالت خطای استانداررد تحت تأثیر فرض تساوی یا عدم تساوی واریانس دو جامعه خواهد بود.

۱) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$: آماره t با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی به صورت زیر:

$$\begin{cases} t = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \xrightarrow{H_0:\mu_1=\mu_2} \boxed{t = \dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}} \\ \boxed{S_P^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \end{cases}$$

۲) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$: آماره t بوده که درجه آزادی آن به همراه آماره به صورت زیر خواهد بود.

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \xrightarrow{H_0: \mu_1 = \mu_2} \boxed{t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}}}$$

$$\text{درجه آزادی} = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

مثال: اگر میانگین یک نمونه 100 تائی از X مساوی 30 و انحراف معیار آن 5 باشد و میانگین یک نمونه 200 تائی از Y مساوی 25 و انحراف معیار آن 10 باشد، مقدار ملاک آزمون صفر بودن تفاوت میانگین‌ها برابر است با: (مدیریت ۷۳)

۱) 15.81 ۲) 1.96 ۳) 5.77 ۴) 3.44

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} n_1 = 100 \\ \bar{x}_1 = 30 \\ S_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} n_2 = 200 \\ \bar{x}_2 = 25 \\ S_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \overset{0}{\cancel{(\mu_1 - \mu_2)}}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(30 - 25)}{\sqrt{\frac{5^2}{100} + \frac{10^2}{200}}} = 5.77$$

○ آزمون مقایسه زوج‌ها (فرضیه نمونه‌های جفت شده)

در آزمون تفاضل میانگین برای دو جامعه (بخش قبل) فرض اساسی مستقل بودن نمونه‌ها در دو جامعه نسبت به هم بود.

در مواردی مانند:
- ۱) بررسی تفاوت نمرات دانشجویان قبل و بعد از یک دوره کلاس تقویتی
- ۲) بررسی تفاوت وزن افراد قبل و بعد از یک دوره رژیم غذایی

نمونه‌های انتخاب شده برای ارزشیابی قبل و بعد از دوره یکسان بوده و مستقل نیستند، بنابراین نمی‌توانیم از روش آزمون تفاضل میانگین برای این نمونه‌ها استفاده کنیم، در چنین مواردی از «آزمون مقایسه زوج‌ها» به شکل زیر استفاده می‌کنیم.

الف) با فرض انتخاب یک نمونه n تائی که رفتار هر عضو آن قبل و بعد از دوره مشخص به صورت جفت (x_i , y_i) باشد، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x_i (قبل)	y_i (بعد)	$d_i = x_i - y_i$
x_1	y_1	$d_1 = x_1 - y_1$
x_2	y_2	$d_2 = x_2 - y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$d_n = x_n - y_n$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

ب) باتوجه به جدول (الف) مقادیر

$\bar{d}$: میانگین تفاضل رفتار

S_d^2: واریانس تفاضل رفتار

$S_{\bar{d}}^2$: واریانس میانگین تفاضل رفتار

به شرح زیر به‌دست می‌آیند:

1) $\bar{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$	3) $S_d^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$
2) $S_{\bar{d}}^2 = \dfrac{S_d^2}{n}$	4) $S_{\bar{d}} = \dfrac{S_d}{\sqrt{n}}$

۱) فرض:

H_0: تفاوت بین قبل و بعد از دوره وجود ندارد: $(d = 0)$

H_1: تفاوتی بین قبل و بعد از دوره وجود دارد: $(d \neq 0)$

۲) آماره (ملاک آزمون):

ملاک آزمون خروجی از توزیع t_{n-1} با $n-1$ درجه آزادی به شرح زیر تبعیت می‌کند:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

نکته : در فرضیه نمونه‌های جفت شده چون نمونه‌ها از هم مستقل نیستند امکان تعیین فاصله اطمینان برای تفاوت قبل و بعد از دوره وجود ندارد.

مثال : به منظور بررسی میزان تأثیر داروی کاهش فشار خون این دارو به 15 نفر تجویز گردیده است و فشار خون آنان قبل از مصرف دارو و سپس دو ساعت بعد از مصرف دارو اندازه‌گیری شده است که نتایج حاصل به شرح جدول زیر می‌باشد آیا براساس این نتایج می‌توان یک برآورد کننده فاصله‌ای برای میزان تأثیر دارو در کاهش فشار خون به‌دست آورد؟ (اقتصاد ۸۳)

	$\bar{x}$	S^2
قبل از مصرف	18	4.5
دو ساعت بعد از مصرف	16	3.1

۱) بله به شرط آن‌که بدانیم واریانس‌ها با هم برابرند.

۲) بله، به شرط آن‌که افراد نمونه با جایگذاری انتخاب شده باشند.

۳) بله، به شرط آن‌که بدانیم توزیع نرمال است.

۴) خیر، چون دو نمونه مستقل نیستند.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

○ آزمون نسبت یک جامعه (P)

در صورتیکه نسبت خاصی در جامعه مورد بررسی باشد. از این آزمون استفاده می‌کنیم:

۱) فرض‌های آماری:

$\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : P \geq P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : P \leq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{cases}$

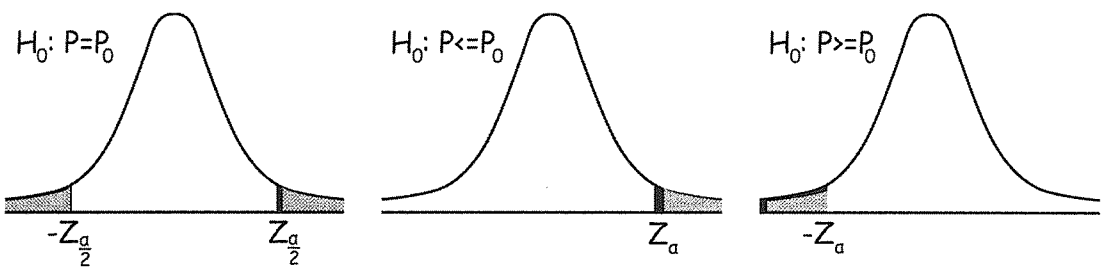
در فرض‌های بالا P_0 نسبتی است که باید مورد آزمون قرار گیرد.

۲) آماره آزمون:

در صورتیکه در یک نمونه n تائی از جامعه x موفقیت داشته باشیم نسبت نمونه $\bar{P} = \frac{x}{n}$ خواهد بود، ملاک آزمون در این وضعیت از توزیع z به شرح زیر تبعیت می‌کند.

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} \quad , \quad \bar{P} = \frac{x}{n}$$

۳) مقادیر بحرانی:



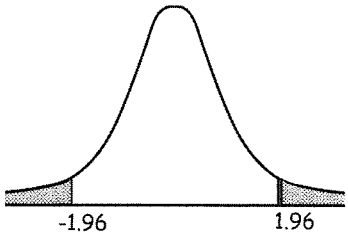
مثال : اگر $\begin{cases} H_0 : P = \frac{1}{2} \\ H_1 : P \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ و از بین 100 آزمایش 59 موفقیت مشاهده شده باشد. آماره آزمون و نتیجه آن در سطح $\alpha = 0.05$ کدام است؟

(اقتصاد ۸۱)

۱) 1.84 و H_0 رد می‌شود. ۲) 1.8 و H_0 رد می‌شود. ۳) 1.84 و H_0 رد نمی‌شود. ۴) 1.8 و H_0 رد نمی‌شود.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} = \frac{0.59 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{100}}} = 1.8 \\ \bar{P} = \frac{x}{n} = \frac{59}{100} \end{cases}$$



فرضیه H_0 قبول می‌شود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ آزمون تفاضل نسبت در دو جامعه: $\left(P_1 - P_2\right)$

در صورتیکه مقایسه دو جامعه آماری با استفاده از داده‌های کیفی انجام شود آزمون تفاضل نسبت در دو جامعه می‌تواند به صورت زیر مطرح شود، P_1 و P_2 به ترتیب نسبت‌های موفقیت در دو جامعه می‌باشند.

۱) فرض‌های آماری:

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : P_1 \leq P_2 \\ H_1 : P_1 > P_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : P_1 \geq P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases}$$

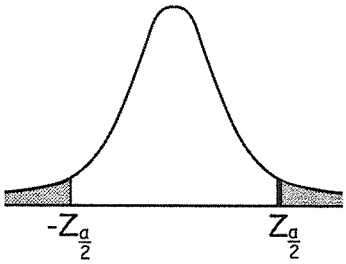
۲) آماره آزمون: (ملاک آزمون)

در صورتیکه دو نمونه مستقل n_1 و n_2 از دو جامعه با نسبت‌های P_1 و P_2 انتخاب شود و به ترتیب X_1 و X_2 موفقیت در هر کدام از نمونه‌ها دیده شود $\bar{P}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ و $\bar{P}_2 = \frac{X_2}{n_2}$ به ترتیب نسبت‌های نمونه خواهند بود، ملاک آزمون در این وضعیت به شرح زیر از توزیع Z تبعیت می‌کند.

$$Z = \frac{\left(\bar{P}_1 - \bar{P}_2\right) - \left(P_1 - P_2\right)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}} \xrightarrow{p_1 = p_2} Z = \frac{\left(\bar{P}_1 - \bar{P}_2\right)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}}$$

۳) مقدار بحرانی:

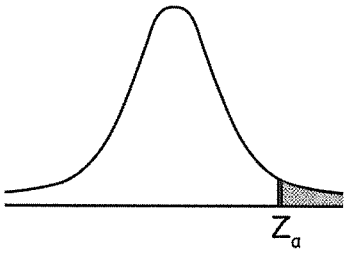
$H_0: P_1=P_2$



$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases} \xrightarrow{U > Z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ یا } U < -Z_{\frac{\alpha}{2}}}$$

فرض H_0 رد می‌شود.

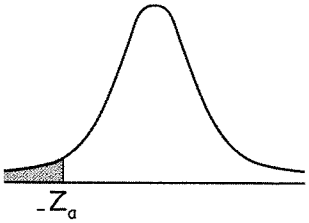
$H_0: P_1<=P_2$



$$\begin{cases} H_0 : P_1 \leq P_2 \\ H_1 : P_1 > P_2 \end{cases} \xrightarrow{U > Z_\alpha}$$

فرض H_0 رد می‌شود.

$H_0: P_1>=P_2$



$$\begin{cases} H_0 : P_1 \geq P_2 \\ H_1 : P_1 < P_2 \end{cases} \xrightarrow{U < -Z_\alpha}$$

فرض H_0 رد می‌شود.

نکته :در صورتی که نمونه‌های n_1 و n_2 از یک جامعه انتخاب شده باشند از یک نسبت مشترک $\overline{P}$ به صورت زیر برای آن‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\overline{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\overline{p}\,\overline{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

مثال ۱: اگر $n_1 = 120$ و $n_2 = 100$ و $\overline{P}_1 = 0.60$ و $\overline{P}_2 = 0.5$ باشد آماره آزمون $H_0 : P_1 \le P_2$ کدام است؟ (مدیریت ۸۳)

۱) -2.1 ۲) -1.347 ۳) 2.575 ۴) 1.491

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}_1\,\overline{q}_1}{n_1} + \frac{\overline{p}_2\,\overline{q}_2}{n_2}}} = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{120} + \frac{0.5 \times 0.5}{100}}} = 1.491$$

مثال ۲: به منظور بررسی عدم تفاوت در نسبت طرفداران نظریه‌های کینزی بین دانشجویان کارشناسی و دانشجویان کارشناسی ارشد رشته اقتصاد، دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های 64 و 36 از هر یک انتخاب گردیده است. تعداد طرفداران در هر کدام از نمونه‌ها به ترتیب 14 و 6 نفر بوده است. اگر $\alpha = 0.05$ باشد، کمیت آماره آزمون و نتیجه آزمون چیست؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) 2.06 و H_0 رد می‌شود. ۲) 1.8 و H_0 را نمی‌توان رد کرد.

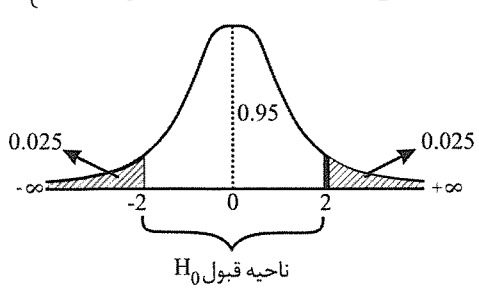
۳) 1.78 و H_0 رد می‌شود. ۴) 0.6 و H_0 را نمی‌توان رد کرد.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(1)\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \leftarrow \text{بررسی عدم تفاوت نسبت طرفداران نظریه‌ای در دانشجویان} \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} z = \dfrac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n_1} + \dfrac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{n_2}}} = \dfrac{(0.22 - 0.17) - 0}{\sqrt{\dfrac{0.22 \times 0.78}{64} + \dfrac{0.17 \times 0.83}{36}}} = 0.6 \\ \overline{p}_1 = \dfrac{x_1}{n_1} = \dfrac{14}{64} \simeq 0.22,\ \overline{p}_2 = \dfrac{x_2}{n_2} = \dfrac{6}{36} \simeq 0.17\ ,\ \alpha = 0.05 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

(4) چون مقدار آماره آزمون به دست آمده در ناحیه اطمینان (قبول H_0) قرار دارد بنابراین فرض H_0 را نمی‌توان رد کرد.



○ آزمون فرض آماری برای واریانس جامعه:

هرگاه فرضیه‌ای دربارهٔ پراکندگی جامعه وجود داشته باشد، صحت و سقم آن را با استفاده از مراحل زیر می‌توان بررسی کرد:

۱) فرض‌های آماری:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

در فرض‌های بالا σ_0^2 واریانسی است که مورد آزمون قرار می‌گیرد.

۲) آمارهٔ آزمون:

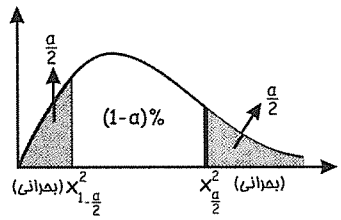
از آنجائیکه توزیع نمونه‌گیری واریانس S^2، یک توزیع χ^2 (کای اسکور) است از آمارهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2}$$

۳) مقدار بحرانی:

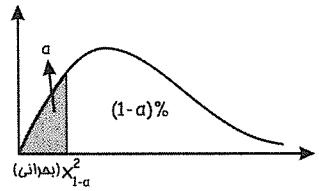
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \xrightarrow{\left(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \text{یا} \left(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right)}$$

فرض H_0 رد می‌شود.



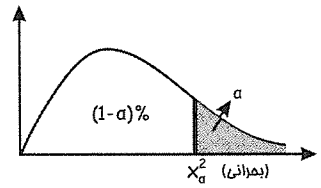
$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \xrightarrow{\left(\chi^2_{n-1} < \chi^2_{1-\alpha}\right)}$$

فرض H_0 رد می‌شود.



$$\begin{cases} H_0 : \sigma_x^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \xrightarrow{\left(\chi^2_{n-1} > \chi^2_{\alpha}\right)}$$

فرض H_0 رد می‌شود.



مثال : برای $n = 14$ و $S^2 = 75$ فرضیه $H_0 : \sigma^2 \geq 100$ را در مقابل فرضیه $H_1 : \sigma^2 < 100$ در سطح $\alpha = 0.01$ آزمون می‌کنیم. در صورتیکه فرض شود جامعه‌ای که نمونه‌ی تصادفی از آن انتخاب می‌شود نزدیک به نرمال باشد کدام‌یک از موارد درست است؟ (کمیت بحرانی از جدول 4.107) (اقتصاد ۸۳)

۱) $\chi^2 = 0.75$ و درنتیجه H_0 رد نمی‌شود.

۲) $\chi^2 = 9.75$ و درنتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

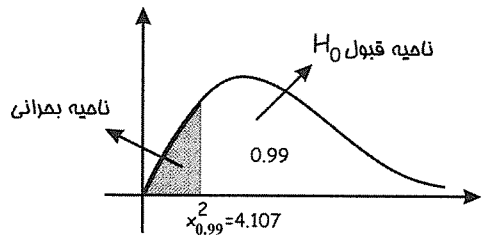
۳) $\chi^2 = 9.75$ و درنتیجه فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

۴) $F = 0.75$ و درنتیجه فرضیه H_0 رد می‌شود.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

باتوجه به $\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geq 100 \\ H_1 : \sigma^2 < 100 \end{cases}$ و نقطه بحرانی 4.107 در سطح $\alpha = 0.01$ خواهیم داشت:



اما مقدار آماره آزمون $\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ می‌باشد که:

$$\chi^2_{13} = \frac{13 \times 75}{100} = 9.75$$

چون مقدار 9.75 در ناحیه قبول H_0 قرار می‌گیرد بنابراین فرض H_0 پذیرفته شده

نکته : مقادیر χ^2 همواره مثبت است از طرفی در مثال بالا χ^2 به‌دست آمده (9.75) بعد از نقطه بحرانی 4.107 قرار گرفته و درنتیجه در ناحیه اطمینان یا همان قبول H_0 است.

○ آزمون فرض آماری برای مقایسه واریانس دو جامعه:

یکی از انواع فرضیه‌های تطبیقی مقایسه واریانس دو جامعه یا بررسی نسبت واریانس دو جامعه است در چنین مواردی از آزمون مقایسه واریانس دو جامعه استفاده کنیم:

۱) فرض‌های آماری:

$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \\ H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \text{ یا } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \end{cases}$

۲) آماره آزمون: (ملاک آزمون)

در صورتیکه نمونه‌های مستقل n_1 و n_2 به ترتیب از دو جامعه با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 انتخاب شوند و S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس‌های نمونه‌باشند. ملاک آزمون برای مقایسه واریانس‌ها یا نسبت واریانس‌های دو جامعه $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ از توزیع F با $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ درجه آزادی به شکل زیر تبعیت می‌کند.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$F_{n_1-1,\,n_2-1}=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$$

درجه آزادی $=n_1-1\,,\,n_2-1$

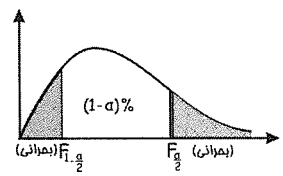
در صورتیکه فرض مورد نظر $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ یا $H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ یا به عبارت بهتر برابری واریانس دو جامعه باشد ملاک آزمون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$F_{n_1-1,\,n_2-1}=\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

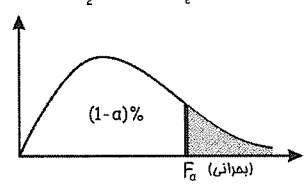
درجه آزادی $=n_1-1\,,\,n_2-1$

۳) نواحی بحرانی:

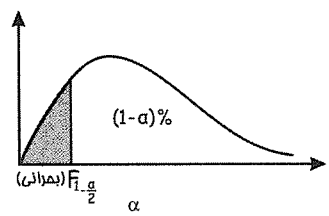
$$\begin{cases}H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2\end{cases}\xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{\left(F_{n_1-1,n_2-1}>F_{\frac{\alpha}{2}}\right),\ \left(F_{n_1-1,n_2-1}<F_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}$$



$$\begin{cases}H_0:\sigma_1^2\leq\sigma_2^2\\ H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2\end{cases}\xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{\left(F_{n_1-1,n_2-1}>F_{\alpha}\right)}$$



$$\begin{cases}H_0:\sigma_1^2\geq\sigma_2^2\\ H_1:\sigma_2^2<\sigma_1^2\end{cases}\xrightarrow[\text{فرض } H_0 \text{ رد می‌شود.}]{\left(F_{n_1-1,n_2-1}<F_{1-\alpha}\right)}$$



توجه:

$$F_{1-\alpha\,,\,m\,,\,n}=\frac{1}{F_{\alpha\,,\,n\,,\,m}}$$

مثال : برای آزمون برابری واریانس در دستگاه اتوماتیک پر کننده قوطی‌های روغن نباتی که وزن آن‌ها برطبق قانون نرمال توزیع شده است اطلاعات زیر به‌دست آمده:

دستگاه ۱: $n_1=30$ $S_1=3$

دستگاه ۲: $n_2=40$ $S_2=4$

مقدار عددی کمیت آماره آزمون کدام است؟ (اقتصاد ۷۸)

۱) $\chi^2=\frac{3}{4}$

۲) $F=\frac{9}{16}$

۳) $F=\frac{\frac{3}{30}}{\frac{4}{40}}$

۴) $\chi^2=\frac{\frac{9}{30}}{\frac{16}{40}}$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

باتوجه به فرضیه مسئله $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (برابری واریانس دو جامعه) آماره آزمون به شکل زیر خواهد بود:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{9}{16}$$

○ آزمون نیکوئی برازش

الف) آزمون χ^2 (کای دو ساده)

هرگاه بخواهیم تطبیق یا عدم تطبیق نتایج مشاهده شده از یک آزمایش را با نتایجی که انتظار داریم در آن آزمایش اتفاق بیافتد بررسی کنیم از آزمون نیکوئی برازش (خوبی برازش) استفاده می‌کنیم.

در نظر بگیرید آزمایشی در صورت وقوع K، حالت داشته باشد (پرتاب تاس 6 حالت) بنابراین با هر بار انجام آزمایش یکی از K حالت اتفاق می‌افتد، حال اگر این آزمایش را n بار تکرار کنیم

- **F_{O_i} (فراوانی تجربی):**

تعداد مشاهدات حالت iام در n بار تکرار آزمایش می‌باشد.

- **F_{e_i} (فراوانی نظری):**

تعداد مشاهداتی که انتظار داریم در n بار آزمایش برای حالت iام اتفاق بیافتد.

- **محاسبه F_{e_i}:**

باتوجه به آن‌که آزمایش به صورت تصادفی اتفاق می‌افتد احتمال وقوع هر یک از K حالت در هر بار انجام آزمایش $\frac{1}{K}$ می‌باشد بنابراین تعداد مشاهدات مورد انتظار در n بار تکرار برای حالت iام برابر با $n \times \frac{1}{K}$ می‌باشد.

$$\boxed{F_{e_i} = \frac{n}{K} \qquad i = 1, 2, \dots, K}$$

۱ـ فرض‌های آماری:

H_0: فراوانی‌های مشاهده شده (F_o) با فراوانی‌های مورد انتظار (F_e) یکسان هستند
H_1: فراوانی های مشاهده شده (F_o) با فراوانی‌های مورد انتظار (F_e) یکسان نیستند.

۲ـ آماره آزمون: (ملاک آزمون)

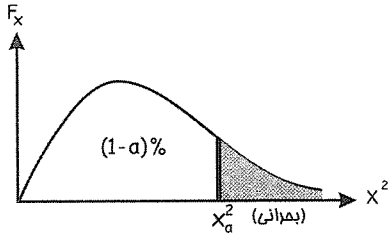
ملاک آزمون نیکوئی برازش برای یک آزمایش با K حالت دارای توزیع χ^2_{K-1} به صورت زیر می‌باشد.

$$\chi^2_{K-1} = \frac{\sum\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}}$$

درجه آزادی $= K - 1$

۳ـ ناحیه بحرانی:

باتوجه به آزمون یک دامنه (دامنه به راست) توزیع χ^2 به شکل زیر است:



نکته : در صورتیکه در آزمون نیکوئی برازش r پارامتر نیز برآورد شوند درجه آزادی برابر با $K - r - 1$ خواهد بود.

درجه آزادی $= K - r - 1$

مثال ۱: در صورتیکه در یک آزمایش نیکوئی برازش تعداد طبقات 10 باشد و پارامترهای μ و σ^2 نیز برآورد شده باشند درجه آزادی کدام است؟

درجه آزادی $= K - r - 1 = 7$

$K = 10 , r = 2$

مثال ۲: براساس اطلاعات زیر، آمارهٔ آزمون برای آزمون این ادعا که فروش کالا در سه نوع دسته‌بندی الف و ب و ج دارای احتمال یکسان است کدام است؟ (اقتصاد ۸۲)

نوع بسته‌بندی	الف	ب	ج
تعداد کالای فروش رفته	100	80	120

۱) $\chi^2_2 = 8$ ۲) $\chi^2_2 = 4.7$ ۳) $\chi^2_3 = 4.7$ ۴) $\chi^2_3 = 8$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نوع بسته‌بندی	الف	ب	ج	
(فراوانی‌های مشاهده شده) F_{o_i} تعداد کالای فروش رفته	100	80	120	$n = \sum F_{o_i} = 300$
(فراوانی‌های مورد انتظار) F_{e_i}	100	100	100	

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\begin{cases} F_{e_i} = \dfrac{n}{K} = 100 \\ n = 300 \ , \ K = 3 \end{cases}$$

$$\chi^2_{K-1} = \chi^2_2 = \frac{\sum \left(F_{o_i} - F_{e_i} \right)^2}{F_{e_i}} = \frac{20^2 + 20^2 + 0^2}{100} = 8$$

ب) آزمون استقلال (χ^2 مضاعف)

در صورتیکه بخواهیم وجود رابطه (وابستگی) یا استقلال بین دو متغیر X , Y که حداقل یکی از آن‌ها کیفی هستند را بررسی کنیم، از آزمون استقلال (χ^2 مضاعف) استفاده می‌کنیم.

مثال : برای تعیین فرضیه «وجود ارتباط بین تحصیل و درآمد» می‌توانیم متغیر X , Y را به صورت:

$$\begin{cases} X = \text{سطوح تحصیل (کیفی)} \\ Y = \text{درآمد برحسب ریال (کمی)} \end{cases}$$

در نظر بگیریم، در صورتیکه دو متغیر مستقل باشند، نتیجه می‌گیریم که توزیع درآمد بدون توجه به تحصیلات اشخاص انجام می‌شود در غیر این صورت در شرایطی که x , y وابسته باشند توزیع درآمد براساس سطوح تحصیل انجام خواهد شد.

برای انجام آزمون استقلال دو متغیر X , Y در صورتیکه متغیر X را با r دسته به صورت $x_1 , \dots , x_r$ و متغیر y را با c دسته به صورت $y_1 , \dots , y_c$ در نظر بگیریم. فراوانی‌های مشاهده شده $\left(F_{o_{ij}} \right)$ در یک نمونه n تائی برای دو متغیر در یک «جدول توافقی» با r سطر و c ستون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$x \backslash y$	y_1	y_2	....	y_c	
x_1	$F_{o_{11}}$	$F_{o_{12}}$	....	$F_{o_{1c}}$	
x_2	$F_{o_{21}}$	$F_{o_{22}}$	....	$F_{o_{2c}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_r	$F_{o_{r1}}$	$F_{o_{r2}}$	....	$F_{o_{rc}}$	
					$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} F_{o_{ij}}$

جدول فراوانی‌های مورد انتظار $\left(F_{e_{ij}} \right)$ باتوجه به جدول بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_{e_{ij}} = \frac{\text{(مجموع فراوانی‌های مشاهده شده } F_{o_{ij}} \text{ در ستون jام) (مجموع فراوانی‌های مشاهده شده } F_{o_{ij}} \text{ در سطر iام)}}{\text{(مجموع کل مشاهدات) } n}$$

$i = 1 , 2 , \dots , r$

$j = 1 , 2 , \dots , c$

x \ y	y_1	y_2	....	y_c	
x_1	$F_{e_{11}}$	$F_{e_{12}}$	....	$F_{e_{1c}}$	
x_2	$F_{e_{21}}$	$F_{e_{22}}$	....	$F_{e_{2c}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_r	$F_{e_{r1}}$	$F_{e_{r2}}$	....	$F_{e_{rc}}$	
					$n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} F_{e_{ij}}$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ فرض‌های آماری:

H_0: دو متغیر x , y مستقل هستند

H_1: دو متغیر x , y وابسته‌اند

۲ـ آمارهٔ آزمون (ملاک آزمون):

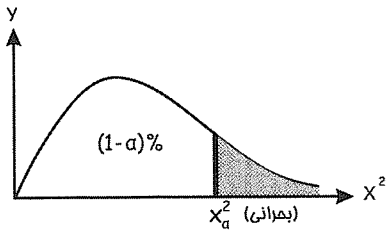
ملاک آزمون استقلال توزیع χ^2 با $(r-1)(c-1)$ درجه آزادی به صورت زیر می‌باشد:

$$\chi^2_{(r-1)(c-1)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(F_{o_{ij}} - F_{e_{ij}}\right)^2}{F_{e_{ij}}}$$

درجه آزادی $= (r-1)(c-1)$

۳ـ ناحیه بحرانی:

آزمون استقلال (χ^2 مضاعف) یک آزمون یک دامنه (دامنه به راست) به شکل زیر می‌باشد:



نکته : ضریب توافقی شدت ارتباط میان x , y را نشان می‌دهد که با C آن را نشان می‌دهند:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

مثال ۱: می‌خواهیم ببینیم آیا بین متغیرهای x , y رابطه وجود دارد یا خیر؟ متغیر کیفی x دارای 3 سطح و متغیر Y دارای 4 سطح است درجه آزادی آزمون چقدر است؟ (مدیریت ۸۲)

۱) 1 ۲) 7 ۳) 12 ۴) 6

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\frac{r = 3}{c = 4} \Rightarrow \text{درجه آزادی} = (r-1)(c-1) = 2 \times 3 = 6$$

مثال۲: برای آزمون استقلال سطوح A و B از دو متغیر در یک آزمایش، جدول توافقی زیر حاصل شده است. مقدار آماره آزمون برابر است با: (اقتصاد ۸۲)

A \ B	B_1	B_2
A_1	30	20
A_2	20	30

۱) 20 ۲) 5 ۳) 4 ۴) 0.8

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} A \backslash B & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 30 & 20 \\ A_2 & 20 & 30 \end{array}}_{F_{o_{ij}}} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{c|cc} A \backslash B & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 25 & 25 \\ A_2 & 25 & 25 \end{array}}_{F_{e_{ij}}}$$

$$\begin{cases} \chi^2_{(2-1)(2-1)} = \dfrac{\sum\left(F_{oij} - F_{eij}\right)^2}{F_{eij}} = \dfrac{(30-25)^2}{25} + \dfrac{(20-25)^2}{25} + \dfrac{(30-25)^2}{25} + \dfrac{(20-25)^2}{25} = 4 \\ r = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$F_{e_{11}} = \frac{\overbrace{(30+20)}^{\text{سطر اول}} \times \overbrace{(30+20)}^{\text{ستون اول}}}{\underbrace{100}_{\text{جمع کل}}} = 25$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ ملاک Z^2 و χ^2

می‌توان نشان داد که آماره Z^2 به طور دقیق برابر χ^2 است. البته برای یک جدول توافقی 2×2 یا آزمون نیکوئی برازش با $k = 2$ طبقه در نظر گرفته می‌شود.

مثال : در نظر است فرضیه سالم بودن یک سکه را آزمون کنیم، سکه را 50 بار آزمایش می‌کنیم که 30 بار شیر مشاهده می‌کنیم، در سطح معنی‌دار 5 درصد درباره فرضیه سالم بودن سکه چه می‌توان گفت؟ (کمیت بحرانی 2.706) (اقتصاد ۸۳)

۱) رد می‌شود، چون $\chi^2 = 4.25$ است.
۲) رد می‌شود، چون $F = 3.75$ است.
۳) قبول می‌شود، چون $\chi^2 = 2$ است.
۴) قبول می‌شود، چون $\chi^2 = 2.57$ است.

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

روش اول:

x_i	شیر	خط	
F_{o_i}	30	20	n =50
$\frac{n}{2} = F_{e_i}$	25	25	

$$\chi^2_{2-1} = \frac{\sum\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}} = \frac{(30-25)^2}{25} + \frac{(20-25)^2}{25} = 2$$

روش دوم: آزمون نسبت به صورت $\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{ملاک آزمون} = z = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} = \dfrac{0.60 - 0.5}{\sqrt{\dfrac{0.5 \times 0.5}{50}}} = \dfrac{0.1}{\sqrt{0.005}} \rightarrow \chi^2_{(1)} = z^2 = \dfrac{0.01}{0.005} = 2 \\ p_0 = \dfrac{1}{2} \\ \bar{p} = \dfrac{x}{n} = \dfrac{30}{50} = 0.6 \end{cases}$$

○ تصحیح یتس

زمانی که در آزمون نیکوئی برازش دو طبقه داشته باشیم، درجه آزادی 1 می‌شود در بعضی مراجع از تصحیح یتس استفاده می‌شود و فرمول χ^2 به صورت زیر در می‌آید.

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(\left|F_{o_i} - F_{e_i}\right| - 0.5\right)^2}{F_{e_i}}$$

مثال : سکه‌ای را 100 بار پرتاب می‌کنیم 55 بار شیر و 45 بار خط ظاهر می‌شود آیا این سکه با احتمال 95% سالم است یا خیر؟

حل : فرضیه‌های آماری به شرح زیر می‌باشند.

H_0 : سکه سالم است

H_1 : سکه سالم نیست

چون درجه آزادی df = 2-1=1 است بنابراین از تصحیح یتس استفاده می‌کنیم و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

روی سکه	F_{o_i}	F_{e_i}	$F_{o_i} - F_{e_i}$	$\left\|F_{o_i} - F_{e_i}\right\|$	$\left(\left\|F_{o_i} - F_{e_i}\right\| - 0.5\right)^2$	$\frac{\left(\left\|F_{o_i} - F_{e_i}\right\| - 0.5\right)^2}{F_{e_i}}$
شیر	55	50	5	5	20.25	0.405
خط	45	50	-5	5	20.25	0.405
Σ	100	100	0			0.81

بنابراین آماره آزمون عبارتست از:

$$\chi^2 = \sum \frac{\left(\left|F_{o_i} - F_{e_i}\right| - 0.5\right)^2}{F_{e_i}} = 0.81$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ آزمون فرض با استفاده از فواصل اطمینان

● ناحیه پذیرش فرض H_0 در آزمون فرض میانگین

در آزمون فرض میانگین ($\mu = \mu_0$ یا $\mu \le \mu_0$ یا $\mu \ge \mu_0$) برآورد فاصله‌ای که ناحیه پذیرش H_0 است می‌بایست شامل μ_0 باشد.

مثال : در فرضیه $\begin{cases} H_0 : \mu = 3 \\ H_1 : \mu \ne 3 \end{cases}$ کدام گزینه ناحیه پذیرش H_0 است؟

۱) $(-1, 2)$ ۲) $(2, 5)$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(4, 5)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این فاصله $\mu_0 = 3$ وجود دارد.

● ناحیه پذیرش فرض H_0 در آزمون فرض تفاضل میانگین دو جامعه

در آزمون فرض تفاضل میانگین دو جامعه $\left(\mu_1 \le \mu_2 , \mu_1 \ge \mu_2 , \mu_1 = \mu_2\right)$ برآورد فاصله‌ای که ناحیه پذیرش H_0 است بایستی شامل 0 باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم فرض $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ را در مقابل فرض $H_1 : \mu_1 \ne \mu_2$ آزمون کنیم براساس کدام‌یک از فاصله‌های اطمینان 0.95 که مربوط به $\mu_1 - \mu_2$ است می‌توان فرض H_0 را با 0.05 رد کرد؟ (اقتصاد ۸۰)

۱) (0 , 15) ۲) (-4 , 1.2) ۳) (-6 , 6) ۴) (2.5 , 3.8)

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

چون در فاصله گزینه آخر 0 وجود ندارد.

مثال ۲: تعبیر $P\left(-25.1 < \mu_1 - \mu_2 < -6.7\right) = 0.95$ این است که در سطح خطای $\alpha = 0.05$ می‌توان ادعا کرد؟

۱) $\mu_1 < \mu_2$ ۲) $\mu_1 > \mu_2$ ۳) $\mu_1 = \mu_2$ ۴) نمی‌توان ادعا کرد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون در فاصله مورد نظر مقادیر منفی است سپس $\mu_1 - \mu_2 < 0$ و درنتیجه $\mu_1 < \mu_2$ است.

مثال ۳: برآورد فاصله‌ای $\mu_1 - \mu_2$ در دامنه (10 , -6) به‌دست آمده است در سطح خطای 0.05 کدام گزینه صحیح است؟

۱) μ_1 , μ_2 اختلاف معنی‌داری با هم ندارند.
۲) μ_1 از μ_2 کوچکتر است.
۳) μ_1 از μ_2 بزرگتر است.
۴) چنین تخمینی برای $\mu_1 - \mu_2$ غیرممکن است.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون در فاصله بیان شده 0 وجود دارد پس $\mu_1 = \mu_2$ قابل قبول بودن و اختلاف معنی‌داری با یکدیگر ندارند.

● ناحیه پذیرش فرض H_0 در آزمون فرض نسبت

در آزمون فرض نسبت ($p = p_0$ یا $p \le p_0$ یا $p \ge p_0$) برآورد فاصله‌ای که ناحیه پذیرش H_0 است می‌بایست شامل p_0 باشد.

مثال : در فرضیه $\begin{cases} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p \neq 0.5 \end{cases}$ کدام گزینه ناحیه پذیرش H_0 است؟

۱) $(4,6)$ ۲) $(-2,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(3,4)$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در این فاصله $p_0 = 0.5$ وجود دارد.

● ناحیه پذیرش H_0 در آزمون فرض تفاضل نسبت دوجامعه

در آزمون فرض تفاضل نسبت دو جامعه $(P_1 = P_2 , P_1 \le P_2 , P_1 \ge P_2)$ برآورد فاصله‌ای که ناحیه پذیرش H_0 است بایستی شامل 0 باشد.

مثال : در فرضیه برابری نسبت بیکاری در دو جامعه کدام گزینه ناحیه رد H_0 است؟

۱) $(-1,3)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

در این فاصله 0 وجود ندارد.

● ناحیه پذیرش H_0 در آزمون نسبت واریانس دو جامعه

در آزمون برابری واریانس در جامعه یا نسبت واریانس دو جامعه $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2 , \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 , \sigma_1^2 \le \sigma_2^2)$ برآورد فاصله‌ای که ناحیه پذیرش H_0 است بایستی شامل عدد 1 باشد.

مثال : در فرضیه $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$ کدام گزینه ناحیه پذیرش H_0 است؟

۱) $(-1,0)$ ۲) $(2,3)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(2,4)$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در این فاصله عدد 1 وجود دارد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ رگرسیون خطی

در معادله خط رگرسیون $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$ برآورد حداقل مربعات مقادیر α , β که β شیب خط و α عرض از مبدأ می‌باشد، به شرح زیر است:

$$\beta = \frac{Cov(x , y)}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}$$

$(\bar{x} , \bar{y})$ نقطه میانگین بوده که خط رگرسیون لزوماً از آن عبور می‌کند.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} , \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

مثال: فرض کنید در یک مسئله برازش رگرسیونی، مقادیر زیر براساس یک نمونه تصادفی $n = 7$ به دست آمده‌اند. برآورد حداقل مربعات مقادیر a , b در معادلهٔ رگرسیونی $Y = a + bX + \varepsilon$ به ترتیب کدامند؟

$$\sum X_i = 0 \quad \sum X_i^2 = 28 \quad \sum Y_i = 21 \quad \sum X_i Y_i = 56$$

۱) $2 , 3$ ۲) $2 , 21$ ۳) $5 , 3$ ۴) $5 , 21$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در معادله رگرسیون $y=a+bx+\varepsilon$ مقادیر b (شیب خط) و a (مقدار ثابت) از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$b=\frac{cov(x,y)}{\sigma_x^2}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\frac{\sum x}{n}\times\frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}=\frac{\frac{56}{7}-\frac{0}{7}\times\frac{21}{7}}{\frac{28}{7}-\left(\frac{0}{7}\right)^2}=2$$

با توجه به آن‌که خط رگرسیون همیشه از نقطه $(\bar{x},\bar{y})$ عبور می‌کند، مقدار a از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \bar{y}=b\bar{x}+a \quad \Rightarrow \quad 3=2\times 0+a \quad \Rightarrow \quad a=3 \\ \bar{y}=\frac{\sum y}{n}=3 \\ \bar{x}=\frac{\sum x}{n}=0 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

نکته : برای آسان کردن فرمول‌های بالا می‌توان از روابط زیر کمک گرفت:

$$S_{xx} = SS_x = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum x^2 - \frac{\left(\sum x\right)^2}{n}$$

$$S_{yy} = SS_y = \sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \sum y^2 - \frac{\left(\sum y\right)^2}{n} \qquad \rightarrow \quad \beta = \frac{SS_{xy}}{SS_x}$$

$$S_{xy} = SS_{xy} = \sum\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) = \sum xy - \frac{\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n}$$

○ آزمون معنی‌دار بودن ($r_{x,y}$ یا $\rho_{x,y}$)

در صورتی‌که x , y دو متغیر دلخواه و معادله خط $y = \alpha + \beta x$ و $r_{x,y}$ (ضریب همبستگی) از طریق نمونه‌گیری به دست آمده باشند در موارد زیر از آزمون معنی‌دار بودن $\left(r_{x,y}\right)$ استفاده می‌کنیم:

الف ـ آزمون معنی‌دار بودن رابطه خطی بین x , y

ب ـ آزمون معنی‌دار بودن ضریب رگرسیون خطی

ج ـ آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون

د ـ آزمون معنی‌دار بودن همبستگی دو متغیر (همبسته یا ناهمبسته)

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ فرض‌های آماری:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 & \text{(دو متغیر ناهمبسته‌اند)} \\ H_1 : \rho \neq 0 & \text{(دو متغیر همبسته‌اند)} \end{cases}$$

۲ـ ملاک آزمون: (آماره آزمون)

$$t_{n-2} = \frac{r - \rho}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}}$$

ملاک آزمون توزیع t با $n - 2$ درجه آزادی می‌باشد، در عین حال داریم:

$$\begin{cases} r = \text{ضریب همبستگی} \\ R^2 = \text{ضریب تشخیص} = (r)^2 \end{cases}$$

نکته ۱: از آن‌جائیکه همیشه $F_{1,n} = \left(t_n\right)^2$ برقرار می‌باشد، بنابراین به جای ملاک آزمون t_{n-2} می‌توان از $F_{1,n-2} = \left(t_{n-2}\right)^2$ استفاده کرد.

نکته۲: با توجه به نکته ۱ در صورتی‌که آماره t_{n-2} در ناحیه بحرانی قرار گیرد، آمارهٔ $F_{1,n-2} = \left(t_{n-2}\right)^2$ نیز در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد.

مثال۱: در یک رگرسیون دو متغیره اگر آماره t مربوط به شیب در ناحیه بحرانی قرار گیرد در خصوص آماره F و نتیجه آزمون کدام گزینه است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) مقدار آماره F نیز در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_0 رد می‌شود.
۲) آماره F در ناحیه بحرانی قرار گرفته و H_1 رد می‌شود.
۳) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای وابسته و شغل رابطه وجود دارد.
۴) آماره F در ناحیه بحرانی قرار نگرفته و بین متغیرهای وابسته و شغل رابطه وجود ندارد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال۲: با توجه به آمار مربوط به واردات کل کشور (Y) و درآمدهای ارزی حاصل از صادرات نفت (X) در طی 21 سال گذشته رگرسیون زیر برآورد شده است. آماره آزمون برای معنی‌دار بودن رابطه خطی بین واردات و درآمدهای ارزی کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

$$\begin{cases} y = 3.2 + 0.9x + e \\ R^2 = 0.81 \end{cases}$$

۱) $Z = 2.5$ ۲) $\chi^2_{20} = 4.6$ ۳) $F_{1,19} = 82.2$ ۴) $t_{19} = 9$

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$ داریم:

$$\begin{cases} t_{n-2} = \dfrac{r-\rho}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} = \dfrac{0.9}{\sqrt{\dfrac{1-0.81}{19}}} = 9 \\ n = 21 \\ R^2 = (r)^2 \Rightarrow 0.81 = r^2 \Rightarrow r = 0.9 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال۳: براساس یک نمونه تصادفی به حجم $n = 5$ از جامعه‌ای نرمال دو متغیره نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\sum x = 20 \qquad \sum x^2 = 90 \qquad \sum xy = 180$$
$$\sum y = 40 \qquad \sum y^2 = 370$$

آماره (ملاک) آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن ضریب رگرسیون خطی Y روی X کدام است؟ (اقتصاد ۸۳)

۱) $t = 3.46$ ۲) $t = 1.9$ ۳) $t = 0.35$ ۴) $t = 5.93$

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} r_{x,y} = \dfrac{Cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \dfrac{\dfrac{\sum xy}{n} - \dfrac{\sum x}{n} \times \dfrac{\sum y}{n}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2\right)\left(\dfrac{\sum y^2}{n} - \left(\dfrac{\sum y}{n}\right)^2\right)}} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \\ t_{n-2} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} = \dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{20}}}{\sqrt{\dfrac{1-0.8}{3}}} = 3.46 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مثال : رابط بین مصرف (c) و درآمد قابل تصرف (y_d) براساس یک نمونه تصادفی 32 تایی به صورت روبه‌رو برآورد شده است:

$\hat{c} = 2.6 + 0.85\, y_d \;,\; R^2 = 0.9$

آماره آزمون برای آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون کدام است؟ (اقتصاد ۸۴)

۱) $F_{1,30} = 270$ ۲) $F_{1,30} = 150$ ۳) $\chi^2_{(30)} = 15$ ۴) $t_{(30)} = 7.2$

حل : گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هرگاه آزمون معنی‌داری رگرسیون خواسته شود منظور آنالیز واریانس رگرسیون و آماره آزمون F است.

$$\begin{cases} F_{1,n-2} = \left(t_{(n-2)}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}}\right)^2 = \dfrac{r^2}{\dfrac{1-r^2}{n-2}} \rightarrow F_{1,30} = \dfrac{0.9}{\dfrac{1-0.9}{32-2}} = \dfrac{27}{0.1} = 270 \\ r^2 = 0.9 \;,\; n = 32 \end{cases}$$

❍ تحلیل واریانس

در آزمون مقایسه میانگین در جامعه، تفاوت‌های مشاهده شده بین دو میانگین نمونه $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ از دو جامعه مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت.

در صورتیکه بخواهیم مقایسه میانگین را برای بیش از دو جامعه بررسی کنیم، دو راه وجود دارد:

۱) مقایسه میانگین جوامع به صورت دو به دو

۲) مقایسه میانگین‌ها به صورت همزمان

برای صرفه‌جوئی در زمان و هزینه مقایسه میانگین‌ها را به صورت همزمان انجام می‌دهند، در این حالت هدف از مقایسه میانگین‌های بیش از دو جامعه این است که، آیا بین میانگین‌های نمونه‌ای جوامع مختلف تفاوت معنی‌داری وجود دارد یا خیر.

مثال : آیا بین میزان محصول 3 نوع بذر تفاوت معنی‌داری وجود دارد یا خیر.

تعریف: تحلیل واریانس روشی برای مقایسه میانگین‌های چند جامعه (بیش از دو جامعه) می‌باشد که از طریق تحلیل و بررسی تفاوت‌های مشاهده شده بین میانگین‌های نمونه چند جامعه این عمل را انجام می‌دهد.

● **شرح روش تحلیل واریانس:**

با فرض آن‌که K جامعه $(i = 1, 2, \dots, K)$ و از هر جامعه یک نمونه n تائی $(j = 1, 2, \dots, n)$ انتخاب کنیم، آنگاه x_{ij} داده مشاهده شده jام از جامعه iام، و $\overline{\overline{X}}$ میانگین کل K جامعه می‌باشد در این حالت $SST = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \overline{\overline{X}} \right)^2$ مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین کل خواهد بود، روش تحلیل واریانس این مجموع را به قسمت‌هائی تجزیه می‌کند.

○ تحلیل واریانس یک عامله

با فرض آن‌که K جامعه $(i = 1, 2, \dots, K)$ و از هر جامعه یک نمونه nتائی $(j = 1, 2, \dots, n)$ انتخاب کنیم، در صورتیکه $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K$ میانگین‌های K جامعه باشد، می‌خواهیم بررسی کنیم آیا تفاوت معنی‌داری بین آن‌ها وجود دارد یا خیر، به عبارت بهتر فرض صفری که باید آزمون کنیم عبارتست از:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_K$ (همه اثرهای تیماری برابر صفر باشد) یا (میانگین K جامعه با هم برابر)

و فرض مقابل نیز عبارتست از:

$H_1 :$ (حداقل یکی از اثرهای تیماری مخالف صفر است) یا (حداقل دو میانگین با هم برابر نیستند)

علت استفاده از اثرهای تیماری به جای میانگین k جامعه آن است که بیشتر تکنیک‌های تحلیل واریانس در ابتدا با آزمایش‌های کشاورزی مطرح شد و در آن کودهای مختلفی را که به خاک اضافه می‌کردند، تیمار می‌خواندند و میزان تأثیر این تیمارها (کودها) بر خاک را مقایسه می‌کردند.

○ آماره آزمون:

باتوجه به آن‌که آزمون تحلیل واریانس برمبنای تجزیه مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین (SST) می‌باشد،

می‌توانیم این مجموع را باتوجه به تحلیل واریانس یک عامله به دو قسمت

۱) مجموع مجذور انحرافات تیماری (بین گروهی) $SS(Tr) = SSr$

۲) مجموع مجذور انحرافات باقیمانده‌ها (خطا): SSE

تجزیه کنیم به طوری که $SST = SS(Tr) + SSE$ خواهد بود، دقت کنید که $SS(Tr)$ ناشی از منبع و SSE ناشی از سایر عوامل می‌باشد.

به طور مثال در مقایسه بین میزان محصول 3 نوع بذر مشخص می‌شود چه مقدار از انحرافات ناشی از نوع بذر است و چه مقدار ناشی از عوامل غیرقابل کنترل دیگر مانند نوع خاک، درجه حرارت، ... است (انحرافات باقیمانده (خطا))

با مشخص کردن منابع ایجاد کننده تغییرات (انحرافات) تعیین می‌شود که مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین کل به چند قسمت باید تجزیه شوند.

در صورتیکه تحلیل واریانس براساس مشاهدات یک منبع باشد به آن تحلیل واریانس یک عامله گویند و تجزیه مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین کل به صورت زیر انجام می‌شود.

مجموع کل مجذور انحرافات از میانگین کل

$$SST = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{\bar{x}} \right)^2$$

مجموع مجذور انحرافات ناشی از منابع

مجموع مجذور انحرافات باقیمانده (خطا)

توجه کنید: در صورتیکه تحلیل واریانس براساس مشاهدات دو منبع باشد به آن تحلیل واریانس دو عامله گویند.

حال برای به‌دست آوردن مقدار عددی ملاک آزمون به شرح زیر عمل می‌کنیم:

دقت می‌کنیم، در K جامعه که هر جامعه یک نمونه n تائی دارد:

$$\text{میانگین کل} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{nK} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \bar{x}_i}{K}$$

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{n}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

در صورتیکه رابطهٔ $SST = SS(Tr) + (SSE)$ را در نظر بگیریم:

$$SST = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{\bar{x}} \right)^2$$

$$SSr = SS(Tr) = n \sum_{i=1}^{K} \left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}} \right)^2 \longrightarrow \text{درجه آزادی } (SS(Tr)) = K - 1$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \bar{x}_i \right)^2 \quad \text{درجه آزادی } (SSE) = K(n-1)$$

از روی روابط بالا می‌توانیم «میانگین مجذور انحرافات بین گروهی $= MS(Tr)$» و «میانگین مجذور باقیمانده‌ها $= MSE$» را به شرح زیر به‌دست آوریم:

$$MS(Tr) = \frac{SS(Tr)}{K-1} \quad , \quad MSE = \frac{SSE}{K(n-1)}$$

ملاک آزمون یا آماره آزمون در این وضعیت از توزیع F تبعیت کرده و به شرح زیر می‌باشد:

$$\boxed{F_{K-1,K(n-1)} = \frac{MS(Tr)}{MSE} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{SSE}{K(n-1)}}}$$

نکته ۱ : در صورتیکه $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2}{n-1}$ واریانس نمونه جامعه iام باشد، آمارهٔ آزمون می‌تواند به شکل زیر ظاهر شود.

$$SS(Tr) = n\sum_{i=1}^{K}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{K}(n-1)S_i^2$$

$$F_{K-1,K(n-1)} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{SSE}{K(n-1)}} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{K}S_i^2}{K}} \rightarrow \boxed{F_{K-1,K(n-1)} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{K}S_i^2}{K}} = \frac{MS(Tr)}{\frac{\sum_{i=1}^{K}S_i^2}{K}}}$$

نکته۲: علت انتخاب ملاک آزمون F برای آزمون برابری چند میانگین به جای ملاک t آن است که مقدار خطای نوع اول (α) در آن کمتر است.

مثال ۱ : برای آزمون برابری متوسط هزینه‌های خانوار در 5 منطقه از هر یک از مناطق، نمونه‌ای به حجم 6 خانوار به طور تصادفی انتخاب شده و براساس آن $SSE = 62.5$ و $SST = 68.9$ به‌دست آمده مقدار عددی آماره آزمون عبارتست از: (اقتصاد ۸۴)

۱) 0.1 ۲) 0.64 ۳) 1.56 ۴) 9.76

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

باتوجه به آزمون تحلیل واریانس خواهیم داشت:

$$n = 6\ ,\ K = 5$$

$$SST = SS(Tr) + SSE \quad \Rightarrow \quad SS(Tr) = 68.9 - 62.5 = 6.4$$

$$\text{آماره آزمون} = F_{K-1,K(n-1)} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{SSE}{K(n-1)}} = \frac{\frac{6.4}{4}}{\frac{62.5}{5(5)}} = 0.64$$

مثال۲: به منظور آزمون برابری میانگین بین 5 جامعه آماری، یک نمونه 5 تائی مستقل از هر یک گرفته شده و اطلاعات زیر محاسبه شده است. آماره آزمون مساوی چه عددی است؟ (اقتصاد ۸۴)

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 = 60 \quad , \quad n\sum_{i=1}^{K}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 80$$

۱) 0.14 ۲) 8.9 ۳) 7.6 ۴) 6.6

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای آزمون برابری بیش از 2 میانگین از تحلیل واریانس استفاده می‌کنیم:

$$SS(Tr) = n\sum_{i=1}^{K}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 80 \quad , \quad SSE = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 = 60$$

از طرفی $K = 5$ و $n = 5$ می‌باشد بنابراین:

$$F_{K-1,K(n-1)} = \frac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{SSE}{K(n-1)}} = \frac{\frac{80}{4}}{\frac{60}{5(4)}} = 6.6$$

مثال۳: براساس نمونه‌های تصادفی 4 تائی از 3 جامعه که دارای توزیع نرمال‌اند، اطلاعات زیر به‌دست آمده است: (اقتصاد ۸۳)

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = 110 , \bar{X}_2 = 100 , \bar{X}_3 = 120 \\ S_1^2 = 180 , S_2^2 = 220 , S_3^2 = 200 \end{cases}$$

کمیت (ملاک) آماره آزمون برای آزمون برابری میانگین در این سه جامعه چیست؟

۱) $\chi^2_{1,1} = 2$ ۲) $F_{2,9} = 2$ ۳) $F_{2,9} = 3$ ۴) $F_{9,2} = 3$

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

برای آزمون برابری بیش از 2 میانگین از تحلیل واریانس استفاده می‌کنیم در عین حال باتوجه به S_i^2 از نکته ۱ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} n = 4 , K = 3 \\ \bar{X}_1 = 110 , \bar{X}_2 = 100 , \bar{X}_3 = 120 \longrightarrow \bar{\bar{X}} = \text{میانگین} = \dfrac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3}{3} = 110 \\ S_1^2 = 180 , S_2^2 = 220 , S_3^2 = 200 \\ SS(Tr) = n\sum_{i=1}^{K}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 4\left[(110-110)^2 + (100-110)^2 + (120-110)^2\right] = 800 \\ F_{K-1,K(n-1)} = \dfrac{\frac{SS(Tr)}{K-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{K} S_i^2}{K}} \Rightarrow F_{2,9} = \dfrac{\frac{800}{2}}{\frac{180+220+200}{3}} = 2 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

اقتصاد ۸۵

۱ ـ در یک جدول توزیع فراوانی که شامل 100 مشاهده است، میانگین 6 و $\sum f_i x_i^2 = 5000$ است. واریانس این مشاهدات چقدر است؟

۱) 1 ۲) 14 ۳) 44 ۴) 49

۲ ـ فرض کنید دهک ششم حقوق کارکنان در یک مؤسسه برابر با 135 هزار تومان است. این بدان معنی است که حقوق دریافتی 40 درصد کارکنان:

۱) بیشتر از 135 هزار تومان است.

۲) درست برابر با 135 هزار تومان است.

۳) کمتر یا مساوی 135 هزار تومان است.

۴) 135 هزار تومان و بقیه کارکنان بیشتر از 135 هزار تومان است.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۳ ـ در جامعه‌ای با حجم $N = 20$ کمیت‌های زیر محاسبه شده‌اند. ضریب چولگی توزیع (α_3) چقدر است؟

$$\sum (x_i - \mu)^2 = 2000 \,,\ \sum (x_i - \mu)^3 = -328$$

۱) 0.0328 ۲) 0.0164 ۳) -0.0164 ۴) -0.0328

۴ ـ نرخ رشد تولیدات یک کارخانه تولیدی طی دو سال گذشته به ترتیب 80% و 20% - بوده است. متوسط نرخ رشد تولید سالانه این کارخانه چقدر است؟

۱) 20% ۲) 30% ۳) 50% ۴) 60%

۵ ـ از بین پنج ورزشکار دو و میدانی، سه نفر را برای شرکت در سه رشتهٔ دو و میدانی مسابقات سراسری انتخاب می‌کنیم. هر ورزشکار می‌تواند در هر سه رشته شرکت کند. تعداد کل حالات ممکن این انتخاب‌ها عبارت است از:

۱) 10 ۲) 60 ۳) 125 ۴) 243

۶ ـ فرض کنید $P(E) = 0.7$ و $P(F) = 0.6$ و حوادث E و F مستقل باشند. آنگاه $P(E' \cup F)$ برابر است با:

۱) 0 ۲) 0.9 ۳) 0.58 ۴) 0.72

۷ ـ در پنج بار پرتاب یک سکه سالم، در چند حالت می‌توان 2 شیر را مشاهده کرد؟

۱) 6 ۲) 10 ۳) 60 ۴) 120

۸ ـ شخصی در جیب خود سه سکه دارد که دو تای آن معمولی و دیگری هر دو روی آن خط است، یکی از سکه‌ها را به تصادف از جیب خود درآورده و پرتاب می‌کند. نتیجه خط است. احتمال این‌که هر دو روی سکه خط باشد. چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) 1

۹ ـ اگر x یک متغیر تصادفی و a یک مقدار ثابت باشد آن‌گاه:

۱) $\operatorname{cov}(x , x) = [E(x)]^2 , \operatorname{cov}(x , a) = a^2 \operatorname{cov}(x)$

۲) $\operatorname{cov}(x , x) = E(x^2) , \operatorname{cov}(x , a) = a^2 S_x^2$

۳) $\operatorname{cov}(x , x) = \sigma_x^2 , \operatorname{cov}(x , a) = a \operatorname{cov}(x)$

۴) $\operatorname{cov}(x , x) = \sigma_x^2 , \operatorname{cov}(x , a) = 0$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱۰ ـ اگر $f(y) = cy^2$ برای $0 \le y \le 2$ و در بقیه نقاط $f(y) = 0$ باشد، برای مقادیری از $f(y)$ که در آن تابع چگالی معنی‌دار و معتبر باشد، مقدار c کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) 2 ۴) $\frac{8}{3}$

۱۱ ـ تابع چگالی مربوط به طول عمر یک قطعه الکترونیکی به صورت زیر می‌باشد، میانگین طول عمر این قطعه چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & x > 10 \\ 0 & x \le 10 \end{cases}$$

۱) ∞ ۲) صفر ۳) 1 ۴) 20

۱۲ ـ تابع احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است، متغیر $y = x^2$ را در نظر بگیرید. مقدار ضریب همبستگی $\rho(x , y)$ برابر است با:

x	−2	0	2
p(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

۱) -1 ۲) 0 ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) 1

۱۳ ـ اگر در هر سال به طور متوسط دو زلزله اتفاق بیافتد، آن‌گاه تعداد زلزله‌هایی که در فاصله زمانی 10 سال اتفاق می‌افتد دارای کدام تابع احتمال است؟

۱) $\frac{e^{-5} 5^x}{x!}$ ۲) $\frac{e^{-5} 5^x}{5!}$ ۳) $\frac{e^{-20} 20^x}{20!}$ ۴) $\frac{e^{-20} 20^x}{x!}$

۱۴ ـ در یک توزیع دوجمله‌ای میانگین برابر 6 و انحراف معیار برابر 2 است. مقدار $p(x>0)$ برابر است با:

۱) 1 ۲) $\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ ۳) $1-\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ ۴) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$

۱۵ ـ اگر x دارای توزیع $N(\mu, 100)$ باشد و داشته باشیم $p(x>124)=0.05$ و $z_{0.05}=1.65$ آن‌گاه مقدار μ برابر است با:

۱) 140.5 ۲) 121.9 ۳) 107.5 ۴) 104.5

۱۶ ـ کدام‌یک از برآوردگرها از واریانس جامعه نااریب (بدون تورش) می‌باشند؟

۱) $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n-1}$ ۲) $S^2=\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{n-1}$ ۳) $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$ ۴) $S^2=(\bar{x}-\mu)^2$

۱۷ ـ به منظور برآورد میانگین جامعه براساس یک نمونه تصادفی 2 تایی، برآوردکننده‌های A و B زیر پیشنهاد شده‌اند. برای تشخیص آن که کدام‌یک مناسب‌تر است چه ملاکی کفایت می‌کند؟

$$A=\frac{2x_1+3x_2}{5}\ ,\ B=\frac{x_1+x_2}{2}+2$$

۱) تورش ۲) واریانس ۳) واریانس + $(\text{تورش})^2$ ۴) واریانس + تورش

۱۸ ـ برای تخمین نسبت موفقیت‌ها در جامعه‌ای، دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1 و n_2 از جامعه گرفته و برآوردکننده $\hat{p}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$ پیشنهاد شده است که در آن x_1 و x_2 تعداد موفقیت‌ها در نمونه اول و دوم است. کمیت انتظاری (امیدریاضی) این برآوردکننده کدام است؟

۱) p ۲) $\frac{2\mu_x}{n_1+n_2}$ ۳) $\frac{p_1+p_2}{n_1+n_2}$ ۴) $\frac{2p}{n_1+n_2}$

۱۹ ـ به ازاء چه مقداری از k برآوردکننده $\hat{\theta}=\frac{x}{k}$ برآوردکننده بدون تورشی (نااریبی) از پارامتر θ جامعه‌ای است که دارای تابع احتمال گسسته مقابل است؟

$$\begin{cases} f(x)=\theta^x(1-\theta)^{1-x} & x=0,1 \\ f(x)=0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

۲۰ ـ موجودی حساب‌های پس‌انداز قرض‌الحسنه یک بانک دارای میانگین 80 هزار تومان با انحراف معیار 16 هزار تومان است. در یک نمونه تصادفی 64 تایی از این حساب‌ها، احتمال این‌که میانگین به دست آمده بیشتر از 84 هزار تومان باشد، چقدر است؟

۱) %2.5 ۲) %5 ۳) %45 ۴) %47.5

۲۱ ـ اگر بخواهیم نرخ بیکاری را در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$ و حداکثر حاشیه خطای $e = 0.01$ برآورد کنیم، حجم نمونه لازم تقریباً چقدر باید باشد؟

۱) 1000 ۲) 5000 ۳) 10000 ۴) 40000

۲۲ ـ فاصله اطمینان $1-\alpha$ برای واریانس جامعه‌ای با توزیع نرمال چیست؟ (α برای دنباله راست توزیع تعریف شده است.)

۱) $\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2}$

۲) $\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2} < \sigma^2 < \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}{(n-1)s^2}$

۳) $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۴) $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$

۲۳ ـ متوسط قیمت هر کتاب درسی 2300 ریال با انحراف معیار 600 ریال می‌باشد. با فرض نامعلوم بودن توزیع جامعه، حداقل 75 درصد قیمت کتاب‌های درسی بین چه مقداری قرار دارد؟

۱) 1100 تا 3500 ۲) 500 تا 4100 ۳) 1200 تا 2300 ۴) 1700 تا 2900

۲۴ ـ یک نمونه تصادفی از 64 لامپ نشان می‌دهد که عمر متوسط نمونه 350 ساعت است. یک فاصله اطمینان 95 درصد برای متوسط طول عمر واقعی لامپ‌ها با فرض $\sigma_x = 100$ عبارت است از:

۱) 150 تا 550 ۲) 154 تا 546 ۳) 250.5 تا 449.5 ۴) 325.5 تا 374.5

۲۵ ـ صاحب یک کارخانه ادعا می‌کند حداقل 80% مردم، محصول کارخانه او را ترجیح می‌دهند. در یک نمونه تصادفی 100 تایی، بیش از چند نفر باید کالای وی را ترجیح دهند تا در سطح $\alpha = 0.05$ ادعای صاحب کارخانه پذیرفته شود. $(z_{0.05} = 1.65)$

۱) 64 ۲) 73 ۳) 79 ۴) 86

۲۶ ـ در یک نمونه تصادفی 2 تایی از مشتریان یک عمده فروش، یکی 7.9 میلیون تومان و دیگری 8.1 میلیون تومان خریده کرده است. فاصله اطمینان 95% برای میانگین مبلغ خرید مشتریان با فرض توزیع نرمال کدام است؟ $(t = 12.7)$

۱) 6.04 – 9.96 ۲) 5.02 – 10.98 ۳) 5.46 – 10.54 ۴) 6.73 – 9.27

۲۷ ـ آماره آزمون برای آزمون این ادعا که فروش اتومبیل‌های سمند، پژو و زانتیا در یک فروشگاه اتومبیل یکسان است، با توجه به اطلاعات حاصل از نمونه تصادفی زیر کدام است؟

اتومبیل	سمند	پژو	زانتیا
تعداد فروش	195	200	205

۱) $\chi^2_{(2)} = 0.25$ ۲) $\chi^2_{(3)} = 0.25$ ۳) $\chi^2_{(2)} = 0.75$ ۴) $F_{2,2} = 0.75$

۲۸ ـ به منظور بررسی اختلاف بین میانگین بهره‌وری پنج واحد تولیدی نمونه‌هایی به حجم 25 استخراج شده و نتایج ذیل به دست آمده است. کمیت آماره آزمون کدام است؟

$$n\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 = 500$$

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) 12 ۴) 2

۲۹ ـ فرض کنید در یک مسئله برازش رگرسیونی، مقادیر زیر براساس یک نمونه تصادفی $n = 7$ به دست آمده‌اند. برآورد حداقل مربعات مقادیر a , b در معادله رگرسیونی $y = a + bx + \varepsilon$ به ترتیب کدامند؟

$$\sum x_i = 0 \ , \ \sum x_i^2 = 28 \ , \ \sum y_i = 21 \ , \ \sum x_i y_i = 56$$

۱) 2 , 3 ۲) 2 , 21 ۳) 5 , 3 ۴) 5 , 21

۳۰ ـ براساس یک نمونه تصادفی $n = 18$ تایی، ضریب همبستگی بین x , y برابر $r = 0.8$ محاسبه شده است. مقدار آماره آزمون برای آزمون صفر بودن ضریب همبستگی جامعه برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 1.39 ۴) 5.3

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی اقتصاد ۸۵

۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} N = 100 \ , \ \mu = 6 \\ \sum f_i x_i^2 = 5000 \rightarrow \text{اشتباه طراح، در صورت سوال منظور از } f_i \text{ همان فراوانی مطلق } (F_i) \text{ بوده} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum F_i x_i}{N}\right)^2 = \frac{\sum F_i x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{5000}{100} - (6)^2 = 50 - 36 = 14$$

۲ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$D_6 = 135$ (دهک ششم) مفهوم آن این است که: 60 درصد از کارکنان حقوقی کمتر و یا مساوی 135 هزار تومان دریافت می‌کنند و یا می‌توان گفت 40 درصد از کارکنان حقوقی بیشتر از 135 هزار تومان دریافت می‌کنند.

۳ـ گزینه ۳صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} sk = \dfrac{\dfrac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\dfrac{-328}{20}}{10^3} = \dfrac{-16.4}{1000} = -0.0164 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \dfrac{2000}{20} = 100 \quad \rightarrow \quad \sigma = 10 \end{cases}$$

۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به رابطه سوم میانگین هندسی و این که داده‌ها برای سه سال متوالی است داریم:

سال اول		سال دوم		سال سوم
x تومان	$\xrightarrow[x + 0.8x]{\text{رشد } \%80}$	1.8 x	$\xrightarrow[1.8x - 0.2(1.8)x]{\text{رشد } - \%20}$	1.44 x

$$\bar{x}_G = \sqrt[\text{تعداد سال‌ها}-1]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[3-1]{\frac{1.44x}{x}} = \sqrt[2]{1.44} = 1.2 \text{ برابر} \rightarrow (1.2 - 1) \times 100 = 20 \text{ درصد}$$

۵ـ گزینه ؟ صحیح می‌باشد.

با آن‌که به اشتباه در پاسخنامه گزینه ۳ انتخاب شده است. مشخص نیست منظور طراح سؤال دقیقا چه بوده است! در عین حال گزینه ۲ به دلایل زیر یکی از انتخاب‌های صحیح می‌باشد.

ابتدا 3 نفر از بین 5 نفر را انتخاب می‌کنیم $\binom{5}{3}$، سپس چون هر کدام می‌توانند در هر کدام از سه رشته شرکت کنند !3 تعداد حالات قرار گرفتن در سه رشته می‌باشد.

$$\binom{5}{3} \times 3! = 60$$

۶ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

هرگاه حوادث E و F مستقل باشند آن‌گاه حوادث (E , F') و (E' , F) و (E' , F') مستقل‌اند.

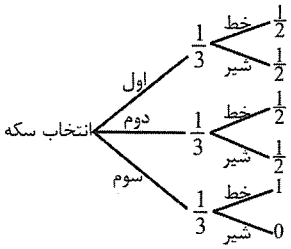
$$\begin{cases} \text{مستقل } F , E' \rightarrow P(E' \cap F) = P(E') . P(F) \\ P(E) = 0.7 , P(E') = 0.3 , P(F) = 0.6 \\ P(E' \cup F) = P(E') + P(F) - P(E' \cap F) = 0.3 + 0.6 - 0.3 \times 0.6 = 0.72 \end{cases}$$

۷ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در 5 بار پرتاب یک سکه سالم $\binom{5}{2} = 10$ تعداد حالات مختلف ظاهر شدن 2 شیر می‌باشد.

۸ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به آن‌که سکه اول و دوم سالم و سکه سوم دورو خط باشد، با در نظر گرفتن قضیه بیز خواهیم داشت:



$$P(\text{خط آمدن} \mid \text{سکه سوم}) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{2}$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

طبق خاصیت دوم و سوم کوواریانس:

$$\begin{cases} \operatorname{cov}(x , y) = E(xy) - E(x)E(y) \\ \operatorname{cov}(x , x) = E(x.x) - E(x)E(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \sigma_x^2 \\ \operatorname{cov}(x , a) = E(x.a) - E(x)E(a) = aE(x) - aE(x) = 0 \end{cases}$$

۱۰ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

طبق قانون اول:

$$\int_{\text{حدپائین}}^{\text{حدبالا}} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^2 f(y)dy = 1 \rightarrow \int_0^2 cy^2 dy = 1 \rightarrow \left[\frac{c}{3}y^3\right]_0^2 = 1 \rightarrow \frac{8}{3}c = 1 \rightarrow c = \frac{3}{8}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$E(x) = \int_{10}^{\infty} x f(x)dx = \int_{10}^{\infty} x.\frac{10}{x^2}dx = \int_{10}^{\infty} \frac{10}{x}dx = [10 \ln x]_{10}^{\infty} = \infty$$

۱۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

راه تستی: چون رابطه بین x , y خطی نیست $(y = x^2)$ می‌توان نتیجه گرفت که $\rho(x , y) = 0$ است.

راه دوم:

$$\rho_{x,y}=\frac{\operatorname{cov}(x\,,\,y)}{\sigma_x\sigma_y}\ \rightarrow\ \rho_{x,x^2}=\frac{\operatorname{cov}\left(x,x^2\right)}{\sigma_x\sigma_{x^2}}=\frac{0}{\sigma_x\sigma_{x^2}}=0$$

$$\begin{cases}\operatorname{cov}\left(x\,,\,x^2\right)=E\left(xx^2\right)-E(x)E\left(x^2\right)=E\left(x^3\right)-E(x)E\left(x^2\right)=0-0\times E\left(x^2\right)=0\\ E(x)=\sum xp(x)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0\\ E\left(x^3\right)=\sum x^3p(x)=(-2)^3\times\frac{1}{4}+0^3\times\frac{1}{2}+2^3\times\frac{1}{4}=0\end{cases}$$

۱۳ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

تعداد اتفاقات در هر فاصله زمانی یا مکانی دارای توزیع پواسن با پارامتر λ است.

$\mu=\lambda=2$ زلزله در یک سال $\rightarrow\ \lambda=20$ در 10 سال

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-20}20^x}{x!}\quad x=0\,,1\,,2\,,\ldots$$

۱۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases}\mu=np=6\\ \sigma=\sqrt{npq}=2\ \rightarrow\ \underbrace{np}_{6}q=4\ \rightarrow\ 6q=4\ \rightarrow\ q=\frac{2}{3}\,,\,p=\frac{1}{3}\,,\,n=18\end{cases}$$

$$p(x>0)=1-p(x=0)=1-\binom{n}{0}p^0q^{n-0}=1-\binom{18}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{18}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{18}$$

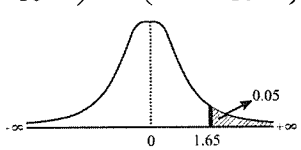
۱۵ـ گزینه ۳صحیح می‌باشد.

با توجه به نوع چهارم سوالات نرمال:

$$x\sim N(\mu\,,100)\ \rightarrow\ \mu=?\,,\sigma^2=100\ \rightarrow\ \sigma=10$$

$$(1)\ p(x>124)=p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}>\frac{124-\mu}{10}\right)=p\left(z>\frac{124-\mu}{10}\right)=0.05$$

$(2)\ z_{0.05}=1.65\rightarrow$



$\rightarrow\ p(z>1.65)=0.05$

با توجه به رابطه $p(z>A)=p(z>B)\rightarrow A=B$

$$(1)\,,(2)\ \frac{124-\mu}{10}=1.65\ \rightarrow\ \mu=107.5$$

۱۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تنها آماره‌های نااریب برای واریانس جامعه عبارتند از:

$$E\left(S_1^2\right)=E\left(S_2^2\right)=\sigma^2$$

هرگاه μ جامعه معلوم باشد (برآوردکننده بهتری است)

$$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{n}=\frac{\sum x_i^2}{n}-(\mu)^2$$

هرگاه μ جامعه نامعلوم باشد.(پیش‌فرض است.)

$$S_2^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right]$$

۱۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که می‌دانیم در بین دو برآوردکننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر (کاراتر) است که MSE (میانگین مجذور خطا) کمتری داشته باشد در این سوال نیز برآوردکننده A نااریب و B اریب است بنابراین ملاک MSE مناسب است. اگر هر دو نااریب بودند ملاک واریانس کفایت می‌کرد.

$$E(A) = E\left(\frac{2x_1 + 3x_2}{5}\right) = \frac{2\mu + 3\mu}{5} = \mu \text{ نااریب}$$

$$E(B) = E\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + 2\right) = \frac{\mu + \mu}{2} + 2 = \mu + 2 \text{ اریب} \rightarrow \text{ اریبی } = E(B) - \mu = \mu + 2 - \mu = 2$$

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = var\left(\hat{\theta}\right) + \left[\underbrace{E\left(\hat{\theta}\right) - \theta}_{\text{اریبی}}\right]^2 \quad \text{یا} \quad \text{میانگین مجذور خطا} = \text{واریانس} + (\text{اریبی})^2$$

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هرگاه در جامعه‌ای دوجمله‌ای به دنبال نسبت یا درصد موفقیت هستیم روابط زیر همیشه برقرار است:

$$\bar{P}_i = \frac{x_i}{n_i} \rightarrow \begin{cases} E\left(x_i\right) = n_i p \\ E\left(\bar{p}_i\right) = p \end{cases}$$

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \rightarrow E\left(\hat{p}\right) = E\left(\frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}\right) = \frac{E\left(x_1\right) + E\left(x_2\right)}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 p + n_2 p}{n_1 + n_2} = \frac{\left(n_1 + n_2\right)p}{n_1 + n_2} = p$$

۱۹ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که تابع فوق، تابع چگالی توزیع برنولی با پارامتر θ است داریم: $E(x) = \theta$

حال اگر بخواهیم $\hat{\theta}$ برای θ نااریب باشد باید $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$ شود بنابراین:

$$E\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{E(x)}{k} = \frac{\theta}{k} = \theta \quad \rightarrow k = 1$$

اگر تشخیص ندهیم که تابع چگالی فوق، تابع چگالی توزیع برنولی است باید امید X را محاسبه کنیم.

$$E(x) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = \sum x\theta^x (1-\theta)^{1-x} = 0 \times \theta^0 \times (1-\theta)^{1-0} + 1 \times \theta^1 \times (1-\theta)^{1-1} = \theta$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۲۰ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

جامعه غیرنرمال (چون ذکر نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n = 64 > 30$ است پس بنابر مورد سوم ـ الف (قضیه حد مرکزی) توزیع $\bar{x}$ نرمال است با:

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_x^2}{n}\right) \text{ و } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\begin{cases} p(\bar{x} > 84) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{84 - 80}{\frac{16}{\sqrt{64}}}\right) = p(z > 2) = 0.0228 \simeq \%2.5 \\ \mu = 80, \sigma = 16, n = 64 \end{cases}$$

۲۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \text{خطا } e = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} \to 0.01 = 2 \times \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{n}} \to \sqrt{n} = 100 \to n = 10000 \\ e = 0.01, \alpha = 0.05 \to z_{0.025} \simeq 2, p = q = \frac{1}{2} \text{ پیش‌فرض} \end{cases}$$

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که می‌دانیم در جامعه نرمال با پارامترهای نامعلوم داریم:

$$\chi^2_{(n-1)} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

با توجه به این‌که توزیع χ^2 چوله به راست است و α برای دنباله راست توزیع تعریف شده $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ سمت راست و عدد بزرگ‌تری است و در مخرج حد پائین قرار می‌گیرد. اگر α را برای دنباله چپ تعریف می‌کرد گزینه ۳ درست می‌بود.

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

۲۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به نامعلوم بودن توزیع جامعه و کلمه حداقل از قضیه اول چبیشف (رابطه اول) استفاده می‌کنیم.

برای آن‌که مشخص کنیم حداقل 0.75 قیمت کتاب‌های درسی در چه فاصله قرار دارد به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} p(\mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon) \overset{\text{حداقل}}{\geq} 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \\ 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0.75 = \frac{3}{4} \to \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4} \to \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\sigma = 600} \varepsilon = 1200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu - \varepsilon < x < \mu + \varepsilon \to 2300 - 1200 < x < 2300 + 1200 \to 1100 < x < 3500 \\ \mu = 2300, \varepsilon = 1200 \end{cases}$$

۲۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جامعه غیرنرمال (چون ذکر نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n = 64 > 30$ است پس بنابر مورد سوم ـ الف (قضیه حد مرکزی) داریم:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{cases} \bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 350 \pm 2 \times \frac{100}{\sqrt{64}} = 350 \pm 25 \rightarrow (325, 375) \xrightarrow[\text{گزینه}]{\text{نزدیک‌ترین}} (325.5 , 374.5) \\ \bar{x} = 350 , \sigma = 100 , n = 64 , \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow z_{0.025} \simeq 2 \end{cases}$$

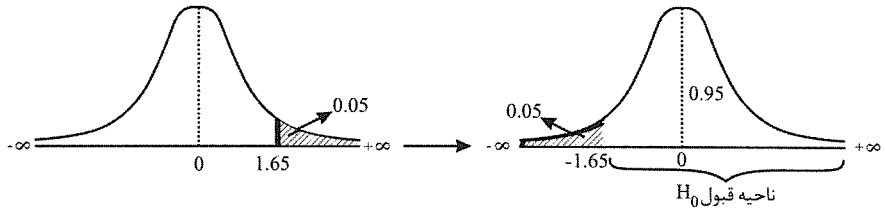
توجه: برای راحتی در محاسبه همیشه $z_{0.025} \simeq 2$ در نظر بگیرید و در آخر نزدیک‌ترین گزینه به اعداد به دست آمده را به عنوان جواب انتخاب کنید. در این سوال نزدیک‌ترین گزینه به اعداد (325 , 375) گزینه ۴ است. (325.5 , 374.5) در واقع نزدیک‌ترین گزینه، گزینه‌ای است که حد پائین آن کمی بیشتر و حد بالای آن کمی کمتر است.

۲۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$(1) \begin{cases} H_0 : p \geq 0.8 \leftarrow \text{ادعا: حداقل 80% مردم محصول او را ترجیح می‌دهند.} \\ H_1 : p < 0.8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{\frac{x}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0 q_0}} = \frac{x - 100 \times 0.8}{\sqrt{100 \times 0.8 \times 0.2}} = \frac{x - 80}{4} \\ \bar{p} = \frac{x}{n} , n = 100 , \ x: \text{تعداد افراد دارای صفت موردنظر} \end{cases}$$

$(3)\ \alpha = 0.05 , z_{0.05} = 1.65 \rightarrow$



با توجه به شکل برای پذیرفتن ادعا یعنی همان فرض H_0 باید: $(4)\ \frac{x - 80}{4} \geq -1.65 \rightarrow x \geq 73.4$

در بین گزینه‌ها به ازاء $x = 79$ و $x = 86$ در ناحیه پذیرش H_0 (ادعای صاحب کارخانه) هستیم. اما در واقع می‌توان گفت بیش از 73 نفر باید کالای وی را ترجیح دهند. یعنی به ازاء $x \geq 74$ نفر ادعا پذیرفته می‌شود.

۲۶ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال، واریانس جامعه نامعلوم و $n \leq 30$ است بنابر مورد دوم ـ ب داریم:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$ و s^2 نمونه با توجه به داده‌ها باید برآورد شوند. $x_i = 7.9 , 8.1 , n = 2$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\begin{cases} \mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 8 \pm 12.7\sqrt{\dfrac{0.02}{2}} = 8 \pm 1.27 \rightarrow (6.73\ ,\ 9.27) \\ \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{7.9+8.1}{2} = 8 \\ s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{(7.9-8)^2 + (8.1-8)^2}{2-1} = 0.02 \rightarrow s = \sqrt{0.02} \end{cases}$$

۲۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

برای بررسی فرضیه یکسان بودن احتمال فروش k نوع اتومبیل از آزمون (نیکوئی برازش) χ^2 ساده به صورت $\chi^2_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(F_{o_i} - F_{e_i})^2}{F_{e_i}}$ استفاده می‌کنیم. در این مسئله با توجه به نمونه $n = 600$ تائی برای $k = 3$ نوع اتومبیل سمند و پژو و زانتیا، فراوانی‌های مشاهده شده (F_{o_i}) که همان تعداد فروش در هر نوع می‌باشد داده شده است. در عین حال فراوانی‌های موردانتظار (F_{e_i}) با در نظر گرفتن احتمال یکسان $\left(p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{3}\right)$ به صورت $F_{e_i} = np_i = \frac{n}{k} = \frac{600}{3} = 200$ به دست می‌آید بنابراین خواهیم داشت:

اتومبیل	سمند	پژو	زانتیا	
F_{o_i}	195	200	205	$n = \sum F_{o_i} = 600$
F_{e_i}	200	200	200	

$$\chi^2_{(k-1)} = \chi^2_{(2)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(F_{o_i} - F_{e_i})^2}{F_{e_i}} = \frac{(195-200)^2}{200} + \frac{(200-200)^2}{200} + \frac{(205-200)^2}{200} = 0.25$$

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به داده‌های مسئله از رابطه اول آنالیز واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \dfrac{\dfrac{SS(tr)}{k-1}}{\dfrac{SSE}{k(n-1)}} \rightarrow F_{4,120} = \dfrac{\dfrac{200}{5-1}}{\dfrac{500}{5 \times (25-1)}} = \dfrac{50 \times 24}{100} = 12 \\ SS(tr) = n\sum (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 = 200 \quad \text{بین‌گروهی} \\ SSE = \sum\sum (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = 500 \quad \text{درون‌گروهی} \\ k = 5\ ,\ n = 25 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۲۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{(شیب خط)}\ b = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n}\frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{56}{7} - \frac{0}{7} \times \frac{21}{7}}{\frac{28}{7} - \left(\frac{0}{7}\right)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

با توجه به این‌که خط رگرسیون برآورد شده همیشه از نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ عبور می‌کند مقدار a (عرض از مبدأ) از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \quad \rightarrow \quad a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{21}{7} - 2 \times 0 = 3$$

۳۰ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} t_{n-2} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} \rightarrow t_{16} = \dfrac{0.8}{\sqrt{\dfrac{1-0.64}{18-2}}} = 5.3 \\ n = 18,\ r = 0.8 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

اقتصاد ۸۶

۱ ـ توزیع فروانی هزینه متوسط ماهانه خانوارها در جدول زیر داده شده است:

هزینه متوسط	15	35	60	85	210	380
تعداد خانوار	32	48	12	5	2	1

میانگین هزینه 20% از پرخرج‌ترین خانوارها چقدر است؟

۱) 19.45 ۲) 41.05 ۳) 97.25 ۴) 108.15

۲ ـ تعداد دانشجویان پذیرفته شده در یک دانشکده در پنج سال متوالی به شرح زیر است:

سال‌ها	1380	1381	1382	1383	1384
تعداد	100	280	310	350	400

متوسط درصد (نرخ) رشد سالانه دانشجویان پذیرفته شده در این دانشکده کدام است؟

۱) %38 ۲) %41 ۳) %50 ۴) %56

۳ ـ چارک سوم داده‌های جدول توزیع فراوانی زیر کدام است؟

X	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10
f	5	3	8	4

۱) $\frac{31}{4}$ ۲) $\frac{32}{3}$ ۳) $\frac{62}{4}$ ۴) $\frac{32}{6}$

۴ ـ در جامعه‌ای با حجم $N = 20$ کمیت‌های زیر محاسبه شده‌اند. ضریب چولگی توزیع چقدر است؟

$$\sum (x_i - \mu)^2 = 180 \ , \sum (x_i - \mu)^3 = -180$$

۱) -1 ۲) -0.33 ۳) 0.77 ۴) 1

۵ ـ تعداد حالات ممکن از تقسیم 10 نفر به سه گروه 5، 3 و 2 نفری برابر است با:

۱) 1440 ۲) 2520 ۳) 2630 ۴) 5040

۶ ـ از بین 5 دانشجو دختر و 3 دانشجوی پسر، سه دانشجو را برای شرکت در یک سمینار به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک دانشجوی دختر انتخاب شود، برابر است با:

۱) $\frac{3}{56}$ ۲) $\frac{5}{56}$ ۳) $\frac{54}{56}$ ۴) $\frac{55}{56}$

۷ ـ دو جعبه هر یک شامل 3 مهره است که از یک تا سه شماره‌گذاری شده است. یک مهره به تصادف از هر جعبه انتخاب شده است. اگر متغیر تصادفی x نشان‌دهندهٔ اختلاف بین اعداد دو مهره باشد، میانگین و واریانس X به ترتیب کدام است؟

۱) $\frac{4}{81}, 0$ ۲) $\frac{12}{9}, \frac{8}{9}$ ۳) $\frac{4}{9}, 0$ ۴) $\frac{44}{81}, \frac{8}{9}$

۸ ـ تعداد دانشجویان کلاس A دو برابر دانشجویان کلاس B است و نسبت دختران در این دو کلاس به ترتیب 0.4 و 0.6 است. اگر دختری به تصادف از این دو کلاس انتخاب شود، احتمال این‌که متعلق به کلاس A باشد چقدر است؟

۱) 0.4 ۲) 0.6 ۳) 0.57 ۴) 0.86

۹ ـ توزیع احتمال مشترک دو متغیر تصادفی y, x به صورت زیر است. کواریانس $(2x, 3y)$ کدام است؟

x \ y	0	1	2
0	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.2	0.1

۱) 0.04 ۲) 0.12 ۳) 0.24 ۴) 0.36

۱۰ ـ تعداد مشتریانی که روزانه به یک فروشگاه مراجعه می‌کنند دارای میانگین 24 و انحراف معیار 4 نفر می‌باشد. در یک روز خاص، احتمال اینکه حداقل بین 16 تا 32 نفر مشتری به فروشگاه مراجعه کنند، چقدر است؟

۱) 0.25 ۲) 0.68 ۳) 0.75 ۴) 0.95

۱۱ ـ امید ریاضی متغیر تصادفی x با تابع چگالی احتمال زیر چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۲ ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{برای سایر مقادیر } x \end{cases}$$

اگر واریانس x برابر $\frac{4}{3}$ باشد، ضریب تغییرات x کدام است؟

۱) $\frac{2}{3\sqrt{3}} \times 100$ ۲) $\frac{4}{\sqrt{3}} \times 100$ ۳) $\frac{2\sqrt{3}}{4} \times 100$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{6} \times 100$

۱۳ ـ فرض کنید متغیر تصادفی x در فاصله $(-1, 1)$ دارای تابع چگالی $f(x) = \frac{1}{2}$ باشد. اگر $y = x^2$ باشد، کواریانس y, x برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 1

۱۴ ـ از 100 لامپ که 20 عدد آن غیراستاندارد است به طور تصادفی 5 لامپ انتخاب می‌شود. کمیت تصادفی x عبارتست از تعداد لامپ‌های غیراستاندارد بین 5 لامپ انتخاب شده، واریانس کمیت تصادفی x عبارت است از:

۱) 0.15 ۲) 0.77 ۳) 0.8 ۴) 0.95

۱۵ ـ ده درصد تراشه‌های تولیدی کارخانه‌ای معیوب است. اگر یک نمونه تصادفی 3 تایی از این تراشه‌ها انتخاب شود. احتمال مشاهده حداقل یک تراشه معیوب چند درصد است؟

۱) 23 ۲) 27 ۳) 73 ۴) 77

۱۶ ـ به طور متوسط در هر شبانه‌روز 12 تصادف در یک شهر اتفاق می‌افتد. احتمال این‌که در 6 ساعت حداکثر یک تصادف اتفاق بیفتد، چند است؟

۱) $1 - e^{-3}$ ۲) $1 - 3e^{-3}$ ۳) $4e^{-3}$ ۴) $3e^{-3}$

۱۷ ـ مناسب‌ترین روش نمونه‌گیری از اتومبیل‌های سواری که وارد یک بزرگراه می‌شوند، کدام است؟

۱) سیستماتیک ۲) ساده ۳) خوشه‌ای ۴) طبقه‌بندی شده

۱۸ ـ احتمال این‌که میانگین به دست آمده از یک نمونه تصادفی 100 تایی از جامعه‌ای که دارای میانگین 50 و انحراف معیار 10 است کمتر از 48 باشد، چند درصد است؟

۱) 2.5 ۲) 5 ۳) 45 ۴) 47.5

۱۹ ـ دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ با ویژگی‌های زیر برای برآورد پارامتر θ پیشنهاد شده است: $\text{var}(\hat{\theta}_2) = 50$ و $E(\hat{\theta}_2 - \theta) = 6$ و $\text{var}(\hat{\theta}_1) = 90$ و $E(\hat{\theta}_1 - \theta) = 0$ آن‌گاه:

۱) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون کاراتر است.

۲) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است زیرا یک برآوردکننده نااریب (بدون تورش) است.

۳) $\hat{\theta}_1$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

۴) $\hat{\theta}_2$ مناسب‌تر است چون میانگین مجذور خطای آن (MSE) کمتر است.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۲۰ ـ اگر $\hat{\theta}$ برآوردکننده پارامتر θ با اریب (تورش) $k\theta + 5$ باشد، کدام برآوردکننده زیر نااریب (بدون تورش)است؟

۱) $\frac{\hat{\theta} - 5}{k}$ ۲) $\frac{\hat{\theta} - 5}{k + 1}$ ۳) $\frac{\hat{\theta}}{k} - \frac{5}{k + 1}$ ۴) $(k + 1)\hat{\theta} + \frac{5}{k + 1}$

۲۱ ـ احتمال این‌که واریانس یک نمونه تصادفی 36 تایی از جامعه نرمالی کمتر از واریانس مربوط به آن جامعه باشد، کدام است؟

۱) $P\left(F_{(1, 35)} < 6\right)$ ۲) $P\left(F_{(1, 36)} < 5\right)$ ۳) $P\left(\chi^2_{(35)} < 36\right)$ ۴) $P\left(\chi^2_{(35)} < 35\right)$

۲۲ ـ برای برآورد میانگین یک جامعه نرمال، حجم نمونه چقدر باید باشد تا حداکثر خطای برآورد برابر $\frac{1}{4}$ انحراف معیار جامعه با $\left(z_{0.025} \simeq 2\right)$

۱) 16 ۲) 32 ۳) 52 ۴) 64

۲۳ ـ برآورد فاصله‌ای مجموع متوسط وزن مسافر (μ_1) و بار همراه وی (μ_2) در یک پرواز براساس یک نمونه تصادفی n_1 تایی از مسافر یک نمونه تصادفی n_2 تایی مستقل از بار همراه مسافران کدام است؟

۱) $\left(\bar{x}_1 + \bar{x}_2\right) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

۲) $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, r}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

۳) $\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\, \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

۴) $\left(\mu_1 + \mu_2\right) \pm t_{\frac{\alpha}{2}, r} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

۲۴ ـ نمرات یک نمونه تصادفی 3 تایی از دانشجویان کلاسی که دارای توزیع نرمال است. 16، 15 و 17 بوده است. فاصله اطمینان 90% میانگین نمرات دانشجویان کدام است؟ $(t \approx 3)$

۱) 15.3 – 16.7 ۲) 14.3 – 17.7 ۳) 13.9 – 18.1 ۴) 13.7 – 18.3

۲۵ ـ براساس یک نمونه تصادفی 100 تایی از نوزادان تازه متولد شده، 50 نفر پسر بوده‌اند. فاصله اطمینان 95% برای نسبت واقعی پسران متولد شده کدام است؟ $\left(z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.64\right)$

۱) 0.418 – 0.582 ۲) 0.4903 – 0.5097 ۳) 0.402 – 0.598 ۴) 0.4918 – 0.5082

۲۶ ـ برای آزمون برابری میانگین‌های دوجامعه نرمال مستقل با واریانس‌های برابر، نتایج زیر از نمونه‌های انتخاب شده از این دو جامعه به دست آمده‌اند.

جامعه اول	$n_1 = 18$	$\bar{x}_1 = 170$	$s_1^2 = 15$
جامعه دوم	$n_2 = 18$	$\bar{x}_2 = 153$	$s_2^2 = 17$

مقدار آماره آزمون برابر است با:

۱) 12.75 ۲) $\frac{17\sqrt{17}}{4}$ ۳) $\frac{34\sqrt{2}}{3}$ ۴) $\frac{17}{4}$

۲۷ ـ در 60 بار پرتاب یک تاس نتایج زیر حاصل شده است:

عدد	1	2	3	4	5	6
فراوانی	12	8	11	13	9	7

آمارهٔ آزمون برای آزمون فرضیه H_0 مبنی بر همگن بودن تاس کدام است؟

۱) 0.17 ۲) 0.28 ۳) 1.7 ۴) 2.8

۲۸ ـ به منظور مقایسه هزینه خوراک خانوارها در 3 منطقه، از هر یک از این مناطق نمونه‌ای به حجم 10 خانوار به طور تصادفی انتخاب می‌شود و براساس نتایج مشاهدات جدول تحلیل واریانس به صورت زیر به دست می‌آید. مقدار عددی آماره آزمون کدام است؟

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مجذور انحرافات
رویه	-	-
خطا	-	54
جمع	-	60.4

۱) 1.3
۲) 1.8
۳) 1.6
۴) 2.5

۲۹ ـ در یک نمونه‌گیری به حجم $n = 4$، نتایج زیر حاصل شده‌اند:

$$\sum x_i y_i = 43 , \sum x_i = 8 , \sum y_i = 16 , \sum x_i^2 = 30 , \sum y_i^2 = 74$$

در معادله رگرسیون $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$، برآوردهای حداقل مربعات β_0 و β_1 به ترتیب عبارتند از:

۱) $\frac{11}{14}, \frac{23}{7}$ ۲) $\frac{11}{14}, \frac{17}{7}$ ۳) $\frac{17}{13}, \frac{35}{26}$ ۴) $\frac{52}{13}, \frac{17}{13}$

۳۰ ـ رابطه بین y , x براساس یک نمونه تصادفی 18 تایی به صورت زیر برآورد شده است:

$$\hat{y} = 15 + 1.7x , R^2 = 0.64$$

آمارهٔ آزمون t برای آزمون فرضیه $\beta = 0$، یعنی عدم وجود رابطه بین y , x، کدام است؟

۱) 2.46 ۲) 3.12 ۳) 5.33 ۴) 6.05

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی اقتصاد ۸۶

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به دو نکته:

۱ـ هزینه متوسط در جدول فراوانی به ترتیب صعودی است.

۲ـ تعداد کل خانوارها برابر $N = 100$ است.

چون میانگین 20% از پرخرج‌ترین خانوارها خواسته شده از انتهای جدول که هزینه متوسط بیشتر است به میزان مجموع 20 خانوار جدا می‌کنیم و سپس میانگین جدول جدا شده را حساب می‌کنیم.

هزینه متوسط	15	35	60	85	210	380	
تعداد خانوار	32	48	12	5	2	1	N = 100

20 خانوار

هزینه متوسط	60	85	210	380	
تعداد خانوار	12	5	2	1	N = 20

$$\mu = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{12 \times 60 + 5 \times 85 + 2 \times 210 + 1 \times 380}{20} = \frac{1945}{20} = 97.25$$

۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به رابطه دوم میانگین هندسی داریم:

$$\bar{X}_G = \sqrt[84-80]{\frac{\text{سال آخر}}{\text{سال اول}}} = \sqrt[4]{\frac{400}{100}} = \sqrt[4]{4} = 1.41 \rightarrow (1.41 - 1) \times 100 = 41 \text{ درصد}$$

۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

اشتباه طراح سوال: منظور از f همان F (فراوانی مطلق است)

X	$2-4$	$4-6$	$6-8$	$8-10$
F_i	5	3	8	4
F_{c_i}	5	8	16	$20 = N$

محل چارک سوم: اولین دسته‌ای که $F_{c_i} \geq \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15 \leftarrow$ دسته سوم $(6-8)$

$$Q_3 = 6 + \frac{15 - 8}{8} \times 2 = 6 + \frac{7}{4} = \frac{31}{4}$$

۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} sk = \dfrac{\dfrac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\dfrac{-180}{20}}{3^3} = \dfrac{-9}{27} = \dfrac{-1}{3} = -0.33 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \dfrac{180}{20} = 9 \rightarrow \sigma = 3 \end{cases}$$

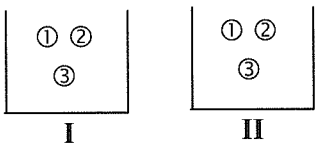
۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{\cancel{10}!}{\cancel{5}!\ 3!\ 2!} = \frac{\cancel{6} \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{\cancel{3}!\ 2!} = 2520$$

۶ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$p\ (\text{حداقل یک دختر}) = 1 - p\ (\text{هیچ دختر}) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}$$

۷ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

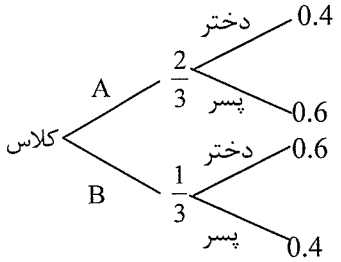


$$X: \begin{cases} 0 & (1,1),(2,2),(3,3) \\ 1 & (2,1),(3,2),(1,2),(2,3) \\ 2 & (3,1),(1,3) \end{cases}$$

x	0	1	2	
p(x)	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

$$\begin{cases} E(x) = \sum xp(x) = 0 \times \frac{3}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9} \\ E(x^2) = \sum x^2 p(x) = 0^2 \times \frac{3}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9} \\ \sigma_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{12}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{12}{9} - \frac{64}{81} = \frac{44}{81} \end{cases}$$

۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$P\ (\text{کلاس } A \mid \text{دختر}) = \frac{P\ (\text{کلاس } A)\ (\text{کلاس } A \mid \text{دختر})}{P\ (\text{کلاس } A)\ (\text{کلاس } A \mid \text{دختر}) + P\ (\text{کلاس } B)\ (\text{کلاس } B \mid \text{دختر})}$$

$$=\frac{0.4\times\frac{2}{3}}{0.4\times\frac{2}{3}+0.6\times\frac{1}{3}}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}=0.57$$

۹ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

x \ y	0	1	2	f(x)
0	0.2	0.3	0.1	0.6
1	0.1	0.2	0.1	0.4
f(y)	0.3	0.5	0.2	1

$$\begin{cases}\operatorname{cov}(2x,3y)=2\times3\operatorname{cov}(x,y)=6\operatorname{cov}(x,y)\\ 6\operatorname{cov}(x,y)=6\left[E(xy)-E(x)E(y)\right]=6(0.4-0.4\times0.9)=0.24\\ E(xy)=\sum xyf(x,y)=0\times0\times0.2+0\times1\times0.3+0\times2\times0.1\\ +1\times0\times0.1+1\times1\times0.2+1\times2\times0.1=0.4\\ E(x)=\sum xf(x)=0\times0.6+1\times0.4=0.4\\ E(y)=\sum yf(y)=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2=0.9\end{cases}$$

۱۰ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به نامعلوم بودن توزیع جامعه (فروشگاه) و خواستن حداقل احتمال از قضیه اول چبیشف (رابطه اول) استفاده می‌کنیم:

$$p(|x-\mu|<\varepsilon)>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\longleftrightarrow\begin{cases}p\left(\underbrace{\mu-\varepsilon}_{a}<x<\underbrace{\mu+\varepsilon}_{b}\right)\overset{\text{حداقل}}{>}1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\\ \varepsilon=\frac{b-a}{2}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن احتمال خواسته شده در بازه $(16\ ,\ 32)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases}p(16<x<32)\overset{\text{حداقل}}{>}1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}=1-\frac{16}{64}=1-\frac{1}{4}=0.75\\ \varepsilon=\frac{32-16}{2}=8\ ,\ \ \sigma=4\end{cases}$$

نکته: قضیه چی‌بی‌شف مقدار حداقل و حداکثر احتمال را بیان می‌کند و قادر به بیان احتمال دقیق نیست بنابراین هرگاه در صورت سؤال یا گزینه‌ها کلمه‌های حداقل یا حداکثر احتمال بود از قضیه چی‌بی‌شف استفاده کنید.

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$E(x)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد هرگاه تابع چگالی پیوسته یک عدد باشد، توزیع x یکنواخت پیوسته است. در این سوال هم x دارای توزیع یکنواخت پیوسته با: $a=1\ ,\ b=5$ و $f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{5-1}=\frac{1}{4}$

$$E(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{1+5}{2}=3\quad,\quad\sigma_x^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(5-1)^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}\rightarrow\sigma=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{(ضریب تغییرات)}\ cv = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{3} \times 100 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \times 100$$

اگر چه مقدار واریانس در صورت مسئله داده شده اما به دست آوردن آن هم ساده بود.

راه دوم: به دست آوردن امید ریاضی از طریق مستقیم است.

$$E(x) = \int_1^5 xf(x)dx = \int_1^5 x.\frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_1^5 = \frac{1}{8}(25-1) = \frac{24}{8} = 3$$

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

راه تستی: با توجه به این‌که رابطه بین x , y خطی نیست $\left(y = x^2\right)$، کواریانس y , x صفر است.

راه دوم: محاسبه کواریانس

$$\begin{cases} cov(x,y) = cov\left(x,x^2\right) = E\left(xx^2\right) - E(x)E\left(x^2\right) = E\left(x^3\right) - E(x)E\left(x^2\right) = 0 - 0 \times E\left(x^2\right) = 0 \\ E(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^2\right) = 0 \\ E\left(x^3\right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^3dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{8}\left(1-(-1)^4\right) = 0 \end{cases}$$

نکته: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، آن‌گاه $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

توجه: تابع چگالی پیوسته یک عدد است پس دارای توزیع یکنواخت پیوسته است که در این‌جا:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}, a = -1, b = 1 \rightarrow E(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه محدود، احتمال ثابت و پیش‌فرض انتخاب بدون جایگذاری است.

توزیع x فوق هندسی است با: $N = 100 , n = 5 , k = 20$

$$\sigma_x^2 = n\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} = 5 \times \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{100-5}{100-1} = 5 \times 0.2 \times 0.8 \times \frac{95}{99} = 0.7676$$

اگر به اشتباه توزیع x را دوجمله‌ای تشخیص دهیم با $\left(n = 5 , p = \frac{k}{N}\right)$ تنها تفاوت‌شان در ضریب تصحیح $\frac{N-n}{N-1}$ است. توجه کنیم که اگر انتخاب با جایگذاری در صورت سؤال ذکر می‌شد توزیع دوجمله‌ای بود و گزینه ۳ صحیح می‌بود.

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه نامحدود و احتمال ثابت است، توزیع x دوجمله‌ای است با: $n = 3 , p=0.1$ (معیوب بودن), $q = 0.9$

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x = 0) = 1 - \binom{n}{x}p^x q^{n-x} = 1 - \binom{3}{0}(0.1)^0(0.9)^3 = 1 - (0.9)^3 = 0.271 \rightarrow \text{درصد } 27$$

۱۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تعداد تصادفات در واحد زمان دارای توزیع پواسن است.

در 6 ساعت $\lambda = \frac{12}{24} \times 6 = 3$ ← در روز: 24 ساعت $\mu = \lambda = 12$

$$p(x \le 1) = p(x=0) + p(x=1) = \frac{e^{-3}(3)^0}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^1}{1!} = e^{-3} + 3e^{-3} = 4e^{-3}$$

۱۷ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۱۸ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که جامعه غیرنرمال (چون ذکر نشده)، واریانس جامعه معلوم و $n = 100 > 30$ است بنابر قضیه حدمرکزی (مورد سوم ـ الف) توزیع $\bar{x}$ هم نرمال است با: $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ و $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$\begin{cases} p(\bar{x} < 48) = p\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{48 - 50}{\frac{10}{\sqrt{100}}}\right) = p(z < -2) = 0.0228 \simeq \%2.5 \\ \mu = 50 \,,\, \sigma = 10 \,,\, n = 100 \end{cases}$$

۱۹ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد در بین دو برآوردکننده دلخواه (اریب یا نااریب) برآوردکننده‌ای بهتر (کاراتر) است که MSE کمتری داشته باشد. در این سؤال با توجه به این‌که $\hat{\theta}_1$ نااریب است و $\hat{\theta}_2$ اریب است معیار MSE برای انتخاب مناسب بودن آماره به کار می‌رود.

$E(\hat{\theta}_1 - \theta) = 0 \to E(\hat{\theta}_1) = \theta \to$ نااریب است $\hat{\theta}_1 \to$ اریبی $(\hat{\theta}_1) = 0$

$E(\hat{\theta}_2 - \theta) = 6 \to E(\hat{\theta}_2) = \theta + 6 \to$ اریبی$(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2) - \theta = \theta + 6 - \theta = 6$

$MSE(\hat{\theta}_1) = var(\hat{\theta}_1) + (\text{اریبی})^2 = 90 + 0$

$MSE(\hat{\theta}_2) = var(\hat{\theta}_2) + (\text{اریبی})^2 = 50 + 6^2 = 86$

با توجه به این‌که $MSE(\hat{\theta}_2)$ کمتر است در نتیجه مناسب‌تر است. $MSE(\hat{\theta}_2) = 86 < MSE(\hat{\theta}_1) = 90$

توجه: با این‌که $\hat{\theta}_1$ نااریب است اما کارایی‌اش از $\hat{\theta}_2$ کمتر است چون برآوردکننده‌ای کاراتر است که حداقل واریانس و اریبی را با هم را داشته باشد. یعنی همان MSE کمتری داشته باشد.

۲۰ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

در صورت سؤال گفته شده $\hat{\theta}$ برآوردی اریب برای θ است که میزان اریبی آن برابر است با: $k\theta + 5$

اریبی $= E(\hat{\theta}) - \theta \to k\theta + 5 = E(\hat{\theta}) - \theta \to E(\hat{\theta}) = k\theta + 5 + \theta \to E(\hat{\theta}) = \theta(k+1) + 5$

حال باید از تک تک آماره‌ها در گزینه‌ها امید بگیریم و آماره‌ای را که امیدش با θ برابر شد یعنی نااریب بود به عنوان جواب انتخاب کنیم.

گزینه ۱) $E\left(\frac{\hat{\theta}-5}{k}\right)=\frac{1}{k}\left(E\left(\hat{\theta}\right)-5\right)=\frac{1}{k}\left(\theta(k+1)+5-5\right)=\frac{k+1}{k}\theta$ اریب

گزینه ۲) $E\left(\frac{\theta-5}{k+1}\right)=\frac{1}{k+1}\left(E\left(\hat{\theta}\right)-5\right)=\frac{1}{k+1}\left(\theta(k+1)+5-5\right)=\theta$ نااریب

گزینه ۳) $E\left(\frac{\hat{\theta}}{k}-\frac{5}{k+1}\right)=\frac{1}{k}E\left(\hat{\theta}\right)-\frac{5}{k+1}=\frac{1}{k}\left(\theta(k+1)+5\right)-\frac{5}{k+1}=\frac{k+1}{k}\theta+\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}$ اریب

گزینه ۴) $E\left((k+1)\hat{\theta}+\frac{5}{k+1}\right)=(k+1)E\left(\hat{\theta}\right)+\frac{5}{k+1}=(k+1)\left(\theta(k+1)+5\right)+\frac{5}{k+1}$ اریب

راه تستی: امید آماره را برابر خود آماره قرار دهید و تابع را برحسب θ مرتب کنید تابع به دست آمده برای θ نااریب است.

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta(k+1)+5\xrightarrow{E(\hat{\theta})=\hat{\theta}}\theta(k+1)+5=\hat{\theta}\rightarrow\theta=\frac{\hat{\theta}-5}{k+1}$$

۲۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$P\left(S^2<\sigma^2\right)=P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\frac{(n-1)\sigma^2}{\sigma^2}\right)=P\left(\chi^2_{(n-1)}<n-1\right)=P\left(\chi^2_{(35)}<35\right)$$

همان‌طور که می‌دانیم هرگاه جامعه نرمال باشد و پارامترهای آن نامعلوم باشند: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$

نکته: اگر در صورت سؤال گفته شد میانگین جامعه معلوم است و یا مقدار میانگین جامعه داده شد، چون دیگر نیازی به برآورد کردن آن نیست از درجه آزادی کم نشده و $\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n)}$ اما اگر چیزی گفته نشود پیش‌فرض μ را نامعلوم می‌دانیم و به شیوه همین سوال عمل می‌کنیم.

۲۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{n}\rightarrow\frac{1}{4}\sigma=z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\rightarrow\frac{1}{4}\cancel{\sigma}=2\frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}}\rightarrow\sqrt{n}=8\rightarrow n=64 \\ e=\frac{1}{4}\sigma\quad,\quad\alpha=0.05\rightarrow z_{0.025}\simeq 2\end{cases}$$

۲۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

این سوأل عیناً سال ۸۳ هم آمده پس با توجه به پاسخ آن که در مثال‌ها هم هست باید از مورد ج ـ 2 یعنی t_r استفاده کنیم اما در گزینه‌ها پاسخ صحیح موجود نیست گزینه ۲ و ۴ از t_r استفاده کرده اما در گزینه ۲ به جای فاصله اطمینان برای مجموع میانگین‌ها فاصله اطمینان برای تفاضل میانگین‌ها است و همچنین از sp استفاده کرده و در گزینه ۴ نیز به جای $\bar{x}_1+\bar{x}_2$ نمونه، $\mu_1+\mu_2$ جامعه گذاشته شده است. تنها گزینه‌ای که فاصله اطمینان برای مجموع میانگین‌ها است گزینه ۱ است. پس ناچار به انتخاب آن هستیم.

۲۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه نرمال، واریانس نامعلوم و $n \le 30$ است بنابر مورد دوم ـ ب داریم:

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow \mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

مقدار t داده شده اما $\bar{x}$ و s باید با توجه به داده‌های نمونه برآورد شوند.

نکته: هرگاه تعداد نمونه $n = 3$ باشد و اعداد نمونه متوالی باشند واریانس نمونه یک است و میانگین اعداد برابر با عدد وسط است در این سوال نیز $n = 3$ و اعداد نمونه متوالی‌اند پس داریم:

$$15 - 16 - 17 \xrightarrow[\text{اعداد متوالی}]{n=3} \bar{x} = \text{داده وسط} = 16 \,,\, s^2 = 1 \rightarrow s = 1$$

اگر از طریق فرمول نیز محاسبه کنیم به همین اعداد می‌رسیم.

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{15+16+17}{3} = \dfrac{48}{3} = 16 \\ s^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{(15-16)^2 + (16-16)^2 + (17-16)^2}{3-1} = \dfrac{1+0+1}{2} = 1 \rightarrow s^2 = 1 \end{cases}$$

$$\mu : \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 16 \pm 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 16 \pm \sqrt{3} \xrightarrow[\text{1.7 بگیرید.}]{\text{همیشه } \sqrt{3} \text{ را برابر}} (14.3 \,, 17.7)$$

۲۵ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \bar{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\overline{pq}}{n}} = 0.5 \pm z_{0.025} \sqrt{\dfrac{0.5, 0.5}{100}} = 0.5 \pm 2 \times 0.05 = (0.4, 0.6) \xrightarrow[\text{گزینه به آن}]{\text{نزدیک‌ترین}} (0.402, 0.598) \\ \bar{p} = \dfrac{x}{n} = \dfrac{50}{100} = 0.5 \;,\; \alpha = 0.05 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.025 \rightarrow z_{0.025} \simeq 1.96 \\ n = 100 \;,\; x = 50 \text{ (تعداد افراد نمونه دارای صفت موردنظر)} \end{cases}$$

۲۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$1) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftarrow \text{برابری میانگین‌های دوجامعه} \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

دو جامعه نرمال، واریانس‌ها نامعلوم اما برابر و $(n_1, n_2 \le 30)$ است پس بنابر مورد (سوم ـ الف)، توزیع $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$، t با درجه آزادی $n_1 + n_2 - 2$ است و داریم:

$$2) \begin{cases} t_{n_1+n_2-2} = \dfrac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{(170-153) - 0}{4\sqrt{\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{18}}} = \dfrac{17}{4\sqrt{\dfrac{1}{9}}} = \dfrac{51}{4} = 12.75 \\ s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \dfrac{(18-1) \times 15 + (18-1) \times 17}{18 + 18 - 2} = \dfrac{255 + 289}{34} = 16 \rightarrow s_p = 4 \end{cases}$$

۲۷ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای بررسی همگن بودن وجوه یک تاس از آزمون (نیکوئی برازش) χ^2 ساده به صورت $\chi^2_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}}$ استفاده می‌کنیم در این مسئله با توجه به $n = 60$ بار پرتاب یک تاس برای $k = 6$ دسته (6 وجه تاس)، فراوانی‌های مشاهده شده $\left(F_{o_i}\right)$ داده شده است، در عین حال فراوانی‌های موردانتظار $\left(F_{e_i}\right)$ با درنظر گرفتن همگن بودن وجوه تاس با احتمال یکسان $\left(p_i = \frac{1}{k} = \frac{1}{6}\right)$ به صورت $F_{e_i} = np_i = \frac{n}{k} = \frac{60}{6} = 10$ به دست می‌آید بنابراین خواهیم داشت:

عدد	1	2	3	4	5	6	
F_{o_i}	12	8	11	13	9	7	$n = \sum F_{o_i} = 60$
F_{e_i}	10	10	10	10	10	10	

$$\chi^2_{(k-1)} = \chi^2_{(5)} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\left(F_{o_i} - F_{e_i}\right)^2}{F_{e_i}} = \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10}$$

$$+ \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} = 2.8$$

۲۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به داده‌های مسئله از رابطه اول آنالیز واریانس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} F_{k-1,k(n-1)} = \dfrac{\frac{SS(tr)}{k-1}}{\frac{SSE}{k(n-1)}} \to F_{2,27} = \dfrac{\frac{6.4}{3-1}}{\frac{54}{3(10-1)}} = 1.6 \\ SST = SSE + SS(tr) \to SS(tr) = 60.4 - 54 = 6.4 \\ SSE = 54 \,,\, SST = 60.4 \,,\, k = 3 \,,\, n = 10 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۲۹ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\beta_1 \text{ (شیب خط)} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{43}{4} - \frac{8}{4} \times \frac{16}{4}}{\frac{30}{4} - \left(\frac{8}{4}\right)^2} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{14}{4}} = \frac{11}{14}$$

$$\beta_0 \text{ (عرض از مبدأ)} = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} = \frac{16}{4} - \frac{11}{14} \times \frac{8}{4} = \frac{34}{14} = \frac{17}{7}$$

۳۰ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

این سؤال دقیقاً مشابه سؤال قبل سال۸۵ است.

$$(1)\begin{cases} H_0 : \beta = 0 \\ H_1 : \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} t_{n-2} = \dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}} = \dfrac{0.8}{\sqrt{\dfrac{1-0.64}{18-2}}} = 5.33 \\ R^2 = 0.64 \rightarrow |r| = 0.8 \xrightarrow[\text{شیب خط رگرسیون}]{\text{با توجه به مثبت بودن}} r = +0.8 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مدیریت و حسابداری ۸۵

۱ ـ در بررسی اثر بخشی یک دوره آموزش مدیریت، از یک گروه گواه یک گروه آزمایش استفاده شده است. گروه فرضیه‌های این نوع تحقیق چگونه‌اند؟

۱) همبسته ۲) مستقل ۳) جور شده ۴) توصیفی

۲ ـ در یک کارگاه 5 ماشین با سرعت 4 دور در ثانیه و 3 ماشین با سرعت 6 دور در ثانیه کار می‌کنند. سرعت متوسط این ماشین‌ها چند دور در ثانیه است؟

۱) 4.85 ۲) 4.75 ۳) 4.63 ۴) 4.57

۳ ـ در 40 داده آماری مجموع داده‌ها برابر 100 و مجموع مجذورات آن‌ها 340 می‌باشد. ضریب پراکندگی کدام است؟

۱) 0.4 ۲) 0.6 ۳) 0.8 ۴) 0.9

۴ ـ در داده‌های آماری طبقه‌بندی شده:

حدود طبقه	15 - 18	18 - 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
فراوانی	7	11	17	9	6

مد کدام است؟

۱) 21.9 ۲) 22.1 ۳) 22.3 ۴) 22.5

۵ ـ در یک توزیع آماری ضریب کشیدگی برابر 0.08- محاسبه شده است، پراکندگی این توزیع و منحنی آن چگونه است؟

۱) تقریباً نرمال ـ بلندتر از نرمال
۲) تقریباً نرمال ـ کوتاه‌تر از نرمال
۳) تفاوت اندکی با نرمال ـ کوتاه‌تر از نرمال
۴) تفاوت اندکی با نرمال ـ بلندتر از نرمال

۶ ـ پنج رقم 2 , 2 , 1 , 1 , 1 را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم احتمال این‌که عدد پنج رقمی حاصل زوج باشد، کدام است؟

۱) 0.3 ۲) 0.4 ۳) 0.5 ۴) 0.6

۷ ـ دو متغیر مستقل x و y با تابع احتمال مقابل داده شده‌اند، α کدام است؟

x \ y	1	2	3
0	0.12	0.2	0.08
2	0.18	α	β

۱) 0.12
۲) 0.2
۳) 0.25
۴) 0.3

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۸ ـ در یک توزیع پاسکال احتمال شکست 0.6 است. اگر x تعداد آزمایش‌های برنولی در این توزیع باشد، $E(x)$ برای پیشامد دوازدهمین موفقیت کدام است؟

۱) 20 ۲) 24 ۳) 25 ۴) 30

۹ ـ در یک شرکت 50 درصد کارکنان تحصیلات کارشناسی، 40 درصد تحصیلات کاردانی و 10 درصد تحصیلات متوسطه دارند، اگر 6 نفر به طور تصادفی از بین آنان انتخاب شود با کدام احتمال مقطع تحصیلات آن‌ها 3 کارشناسی، 2 کاردانی و 1 نفر متوسطه است؟

۱) 0.12 ۲) 0.16 ۳) 0.18 ۴) 0.24

۱۰ ـ اگر $\operatorname{cov}(x , y) = 0$ باشد، کدام بیان برای رابطه x و y صحیح است؟

۱) رابطه خطی ۲) رابطه غیرخطی ۳) رابطه غیرخطی یا مستقل ۴) الزاماً مستقل

۱۱ ـ اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته به صورت $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4x - x^2); & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$ باشد، $p(x > 2)$، کدام است؟

۱) $\frac{16}{27}$ ۲) $\frac{14}{27}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲ ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 32 و واریانس 4 تقریباً چند درصد داده‌ها بین دو عدد 38 و 26 قرار می‌گیرند؟ $(S_{-\infty}^{-3} = 0.0013)$

۱) 89.6 ۲) 92.3 ۳) 95.4 ۴) 99.7

۱۳ ـ در یک توزیع پواسن با $\lambda = 36$ تقریب نرمال در نظر می‌گیریم، عدد متناظر z برای داده $x = 45$ کدام است؟

۱) 1.2 ۲) 1.25 ۳) 1.5 ۴) 1.75

۱۴ ـ فرض کنید z_1 تا z_k متغیرهای استاندارد صفر و یک باشند، آن‌گاه توزیع $\sum_{i=1}^{k} z_i^2$ کدام است؟

۱) کای ـ مربع ۲) استیودنت ۳) فیشر ۴) نرمال

۱۵ ـ در جدول مقابل شیب خط رگرسیون y نسبت به x کدام است؟ (مدیریت و حسابداری ۸۵)

x	y
5	8
6	3
10	4
7	5

۱) 0.5 ۲) 0.4
۳) -0.4 ۴) -0.5

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی مدیریت و حسابداری ۸۵

۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نمونه‌های دو مجموعه باید از هم مستقل باشند.

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به واحد ترکیبی (دور در ثانیه) از میانگین هارمونیک استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x}_H = \frac{5+3}{\frac{5}{4}+\frac{3}{6}} = \frac{8}{\frac{21}{12}} = \frac{96}{21} = 4.57$$

۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \sum x_i = 100 & \text{مجموع داده‌ها} \\ \sum x_i^2 = 340 & \text{مجموع مجذورات} \\ N = 40 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\begin{cases} cv = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5} = 0.6 \\ \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2 = \frac{340}{40} - \left(\frac{100}{40}\right)^2 = 8.5 - 6.25 = 2.25 \rightarrow \sigma = 1.5 \\ \mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{100}{40} = 2.5 \end{cases}$$

۴ـ گزینه ۳صحیح می‌باشد.

طبقه مد، طبقه‌ای که دارای بیشترین فراوانی است ← طبقه سوم $(21-24)$

$$Mo = 21 + \frac{(17-11)}{(17-11)+(17-9)} \times 3 = 22.28 \simeq 22.3$$

۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به منفی بودن ضریب کشیدگی، کشیدگی توزیع کوتاه‌تر از نرمال است و چون $0 < |E| \leq 0.1$ کشیدگی توزیع تقریباً نرمال است.

۶ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{4!}{3!} = \text{تمام اعداد 5 رقمی زوج با ارقام } 2,2,1,1,1 \text{ و } \frac{5!}{3!\,2!} = \text{تمام حالات قرار گرفتن ارقام } 2,2,1,1,1 \text{ در کنار هم}$$

$$P\,(\text{زوج بودن}) = \frac{\frac{4!}{3!}}{\frac{5!}{3!\,2!}} = \frac{4}{10} = 0.4$$

یادآوری:

دقت کنید برای اعداد 5 رقمی زوج با ارقام 2 , 2 , 1 , 1 , 1، کافیست یک رقم 2 را سمت راست ثابت نگه داریم و بقیه ارقام جایگشت داشته باشند.

$$\boxed{1,1,1,1,2}\ \boxed{2} \rightarrow \frac{4!}{3!}$$

۷ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به استقلال دو متغیر x و y باید به ازاء تمام x و y های جدول داشته باشیم: $f(x,y)=f(x)f(y)$

بنابراین برای $f(0,2)$ نیز رابطه بالا باید برقرار باشد. $f(0,2)=f(x=0)f(y=2)$

x \ y	1	2	3	f(x)
0	0.12	0.2	0.08	0.4
2	0.18	α	β	α + β + 0.18
f(y)	0.3	$\boxed{0.2+\alpha}$	0.08 + β	1

$$0.2 = 0.4\times(0.2+\alpha) \rightarrow 0.2 = 0.08 + 0.4\alpha$$
$$\rightarrow\ 0.12 = 0.4\alpha\ \rightarrow\ \alpha = 0.3$$

۸ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به کلمه «دوازدهمین موفقیت» متوجه می‌شویم که توزیع دوجمله‌ای منفی است.

$$\begin{cases} q = 0.6\ \text{(شکست)}\ \text{و}\ p = 0.4\ \text{و}\ r = 12 \\ E(x) = \dfrac{r}{p} = \dfrac{12}{0.4} = 30 \end{cases}$$

۹ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به در نظر گرفتن توزیع چندجمله‌ای احتمال موردنظر به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{6!}{3!2!1!}(0.5)^3(0.4)^2(0.1)^1 = 60\times 0.125\times 0.16\times 0.1 = 0.12$$

۱۰ـ گزینه ۳صحیح می‌باشد.

با توجه به آن‌که کوواریانس دو متغیر جهت و نوع ارتباط آن دو (خطی یا غیرخطی بودن)را بیان می‌کند، داریم:

$$\operatorname{cov}(x,y)=0 \rightarrow x,y \begin{cases} \text{۱) یا مستقل‌اند} \\ \text{۲) یا رابطه غیرخطی دارند} \end{cases}$$

۱۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$p(\alpha < x < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

$$p(x>2) = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{9}(4x - x^2)dx = \frac{1}{9}\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_2^4$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$= \frac{1}{9}\left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{9} \times \frac{16}{3} = \frac{16}{27}$$

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

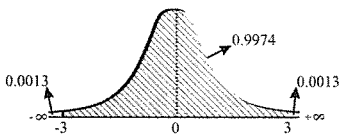
با توجه به نوع سوم سؤالات نرمال:

$$x \sim N(32\,,4) \;\rightarrow\; \mu_x = 32\,,\ \sigma_x^2 = 4 \;\rightarrow \sigma = 2$$

$$p(26 < x < 38) = p\left(\frac{26-32}{2} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{38-32}{2}\right) = p(-3 < z < 3) = 0.9974 \rightarrow 99.7 \text{ درصد}$$

$$S_{-\infty}^{-3} = p(z < -3) = p(z > 3) = 0.0013$$

$$p(-3 < z < 3) = 1 - 2 \times 0.0013 = 0.9974$$



۱۳ـ گزینه ۳صحیح می‌باشد.

نکته: در توزیع پواسن هرگاه مقدار $\lambda > 10$ باشد تقریب نرمال مناسب است.

$$\text{پواسن } x : \lambda = 36 \xrightarrow[\text{تقریب}]{\lambda > 10} \begin{cases} \mu_x = \lambda = 36 \\ \sigma_x^2 = \lambda = 36 \;\rightarrow\; \sigma_x = 6 \end{cases}$$

با توجه به نوع اول سؤالات نرمال:

$$x = 45 \;\rightarrow\; z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{45-36}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

در صورتی که z_i نرمال استاندارد باشد، آن‌گاه:

$$z_i^2 \sim \chi_{(1)}^2 \;\rightarrow\; \sum_{i=1}^{k} z_i^2 \sim \chi_{(k)}^2$$

۱۵ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

x^2	x	y	xy
25	5	8	40
36	6	3	18
100	10	4	40
49	7	5	35
$\sum x^2 = 210$	$\sum x = 28$	$\sum y = 20$	$\sum xy = 133$

$$\text{شیب خط} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n}\frac{\sum y}{n}}{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \frac{\frac{133}{4} - \frac{28}{4} \times \frac{20}{4}}{\frac{210}{4} - \left(\frac{28}{4}\right)^2} = \frac{\frac{-7}{4}}{\frac{14}{4}} = -0.5$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

مدیریت و حسابداری ۸۶

۱ ـ اولین مرحله در یک تحقیق علمی کدام است؟

۱) فرضیه‌سازی ۲) جمع‌آوری داده‌ها ۳) هدف‌گذاری ۴) تحلیل یافته

۲ ـ فزونی میانگین حسابی از میانگین هندسی داده‌های

x_i	9	12	16
f_i	2	3	2

کدام است؟

۱) 0.24 ۲) 0.25 ۳) 0.27 ۴) 0.28

۳ ـ طبق قانون چی‌بی‌شف انتظار می‌رود 84 درصد مشاهدات در دامنهٔ (88 , 72) قرار گیرند. مقدار انحراف معیار این مشاهدات کدام است؟

۱) 2.4 ۲) 3.2 ۳) 3.6 ۴) 4.2

۴ ـ در یک توزیع فراوانی داده‌ها، چارک‌های اول، دوم و سوم به ترتیب 36، 61 و 76 می‌باشد، نوع توزیع از نظر تقارن نسبت به نرمال چگونه است؟

۱) چوله به راست ـ تقریباً نرمال ۲) چوله به راست ـ تفاوت اندک
۳) چوله به چپ ـ تقریباً نرمال ۴) چوله به چپ ـ تفاوت اندک

۵ ـ واریانس کل داده‌ها، متشکل از سه گروه جدول روبه‌رو کدام است؟

N	100	200	700
μ	14	18	20
σ^2	50	60	40

۱) 48.4 ۲) 47.5
۳) 45.8 ۴) 45

۶ ـ اگر $N = 20$، $\sum_{i=1}^{20}(x_i - \mu)^4 = 8640$ و واریانس جامعه 12 باشد، ضریب کشیدگی کدام است؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۷ ـ میانه در توزیع آماری 50 مشاهده دسته‌بندی شده برابر 41 می‌باشد. اگر طول دسته‌ها 5، فراوانی طبقه میانه‌دار 10 و مجموع فراوانی‌های ماقبل طبقه میانه‌دار برابر 18 باشد، حدود دسته میانه‌دار، کدام است؟

۱) (36.5,41.5) ۲) (37 , 42) ۳) (37.5 , 42.5) ۴) (38 ,43)

۸ ـ اعداد 6، 5، 4، 3، 2، 1 بر روی 6 مهره یکسان نوشته شده‌اند، اگر دو مهره را با هم بیرون آوریم با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب 3 خواهد بود؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{4}{15}$

۹ ـ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مجموع دو عدد رو شده 7 باشد، با کدام احتمال تعداد دفعات پرتاب شده فرد است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{6}{11}$

۱۰ ـ از جعبه‌ای که محتوی 12 عدد کالا است، 4 عدد آن معیوب است. به تصادف 2 تا را انتخاب می‌کنیم اگر x تعداد کالای سالم انتخاب شده باشد، امید ریاضی x کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{14}{11}$

۱۱ ـ در توزیع احتمال توأم روبه‌رو، $\operatorname{cov}(x,y)$، کدام است؟

y \ x	0	1	2
1	0	0.1	0.2
3	0.3	0.4	0

۱) -0.56 ۲) -0.46
۳) صفر ۴) 0.64

۱۲ ـ وزنه‌برداری در هر آزمون می‌تواند سه نوع امتیاز A، B و C را به ترتیب با احتمالات 0.5، 0.3 و 0.2 کسب نماید. احتمال این‌که در هفت بار آزمون امتیازات وی 2 بار A، 2 بار B و 3 بار C باشد، کدام است؟

۱) 0.0378 ۲) 0.0756 ۳) 0.168 ۴) 0.378

۱۳ ـ در تابع چگالی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$، میانگین x کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

۱۴ ـ اگر یک نمونه 100 تایی از جامعه اول با واریانس 9 و یک نمونه 25 تایی از جامعه دوم با واریانس 4 انتخاب شوند و این دو نمونه مستقل از یکدیگر باشند، انحراف معیار تفاضل میانگین دو جامعه کدام است؟

۱) 0.25 ۲) 0.5 ۳) 1.25 ۴) 1.5

۱۵ ـ ضریب همبستگی بین دو متغیر در جدول روبه‌رو، کدام است؟

x	2	3	4	5	6
y	3	5	1	4	2

۱) 0.3 ۲) -0.3
۳) -0.2 ۴) 0.2

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی مدیریت و حسابداری ۸۶

۱ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

اشتباه طراح سؤال: منظور از f_i همان F_i (فراوانی مطلق) بوده است. می‌دانیم که f_i (فراوانی نسبی) عددی بین $(0,1)$ است بنابراین تشخیص آن ساده است.

باید هر دو میانگین حسابی و هندسی محاسبه شود و سپس تفاضل میانگین حسابی از هندسی را به دست آورد.

x_i	9	12	16	
F_i	2	3	2	$N = 7$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{N} = \frac{2\times 9 + 3\times 12 + 2\times 16}{7} = \frac{86}{7} = 12.28$$

$$\bar{X}_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{F_i}} = \sqrt[7]{\underbrace{9^2}_{(3^2)^2}\times 12^3\times \underbrace{16^2}_{(4^2)^2}} = \sqrt[7]{\underbrace{3^4\times 4^4}_{12^4}\times 12^3} = \sqrt[7]{12^4\times 12^3} = \sqrt[7]{12^7} = 12$$

فزونی میانگین حسابی از میانگین‌های هندسی:

$$\bar{X} - \bar{X}_G = 12.28 - 12 = 0.28$$

۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

از قضیه اول چبیشف (رابطه اول) استفاده می‌کنیم.

برای آن‌که حداقل 0.84 مشاهدات در فاصله (88 , 72) قرار گیرد یعنی:

$$p(72 < x < 88) > 0.84$$

بایستی:

$$\begin{cases} p\left(\underbrace{\mu-\varepsilon}_{a} < x < \underbrace{\mu+\varepsilon}_{b}\right) \overset{\text{حداقل}}{>} 1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \\ 1 - \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0.84 \rightarrow \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0.16 \rightarrow \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = 0.4 \rightarrow \dfrac{\sigma}{8} = 0.4 \rightarrow \sigma = 3.2 \\ \varepsilon = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{88-72}{2} = 8 \end{cases}$$

۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$Q_1 = 36 \quad , \quad Q_2 = 61 \quad , \quad Q_3 = 76$$

تنها راه به دست آوردن چولگی از روی چارک‌ها فرمول سوم چولگی پیرسن است.

$$\text{(پیرسن)}\ sk_Q = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{76 - 2\times 61 + 36}{76 - 36} = \frac{-10}{40} = -0.25$$

با توجه به منفی بودن علامت ضریب چولگی توزیع داده‌ها چوله به چپ می‌باشد و چون $0.1 < |sk| \le 0.5$ از نظر تقارن تفاوت اندک با توزیع نرمال دارد.

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\text{(میانگین کل)}\ \mu = \frac{\sum N_i\mu_i}{\sum N_i} = \frac{100\times 14 + 200\times 18 + 700\times 20}{100+200+700} = \frac{19000}{1000} = 19$$

$$\text{(واریانس کل)}\ \sigma^2 = \frac{\sum N_i\sigma_i^2 + \sum N_i\left(\mu_i-\mu\right)^2}{\sum N_i}$$

$$= \frac{100\times 50 + 200\times 60 + 700\times 40 + \overset{2500}{\cancel{100(14-19)^2}} + \overset{200}{\cancel{200(18-19)^2}} + \overset{700}{\cancel{700(20-19)^2}}}{1000} = \frac{48400}{1000} = 48.4$$

۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\text{(ضریب کشیدگی)}\ E = \frac{\frac{\sum\left(x_i-\mu\right)^4}{N}}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{8640}{20}}{(12)^2} - 3 = \frac{432}{144} - 3 = 3 - 3 = 0$$

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$Md = 41 \quad , \quad N = 50 \quad , \quad I =$ طول دسته $= 5$

$F_{Md} = 10$ (فراوانی طبقه میانه‌دار) و $F_{C_{Md-1}} = 18$ (فراوانی تجمعی دسته ماقبل میانه)

$$Md = \text{حدپائین طبقه} + \frac{\frac{N}{2} - F_{C_{i-1}}}{F_i}\times \text{طول دسته} \rightarrow 41 = \text{حدپائین طبقه} + \frac{\frac{50}{2} - 18}{10}\times 5$$

$\rightarrow$ حد پائین طبقه $= 41 - 3.5 = 37.5 \rightarrow$ حدود دسته $= (37.5, 37.5+5) = (37.5, 42.5)$

۸ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$A: (1,2), (1,5), (2,4), (3,6), (4,5)$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{\binom{6}{2}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

۹ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

X : تعداد دفعات پرتاب دو تاس برای رسیدن به اولین مجموع 7 دارای توزیع هندسی است.

$\{(1,6),(1,6),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$

$$p = p\ (\text{مجموع دو تاس } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تعداد دفعات پرتاب شده فرد باشد یعنی: $x = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \leftarrow$ تولید اعداد فرد

$$p(x = 2n+1) = \sum pq^{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$$

$n = 0, 1, \ldots$

یادآوری: تصاعد هندسی

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدرنسبت}} = \frac{\left(\frac{25}{36}\right)^{0}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{36}{11}$$

$$p\underset{n=0,1,\ldots}{(x = 2n+1)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6}\times\frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

۱۰ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

جامعه محدود، احتمال ثابت، پیش‌فرض انتخاب بدون جایگذاری (ذکر شده) است. بنابراین توزیع x فوق‌هندسی است.

$$\begin{cases} N = 12\ , n = 2\ , k = 8 & \text{(سالم)} \\ E(x) = n\,.\frac{k}{N} = 2\times\frac{8}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

توجه کنیم که اگر به اشتباه توزیع x را دوجمله‌ای می‌دانستیم بازهم جواب همین بود چون $n = 2\ , p = \frac{k}{N} = \frac{8}{12}$ و $E(x) = np$ است. اما دقت کنیم که توزیع را درست تشخیص دهیم زیرا همیشه امید را نمی‌خواهند و برای به دست آوردن سایر مقادیر دچار اشتباه می‌شویم.

۱۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به مقدار احتمال توأم صفر در جدول نتیجه می‌گیریم دو متغیر y, x مستقل نیستند پس ناچار به محاسبه هستیم.

y \ x	0	1	2	f(y)
1	0	0.1	0.2	0.3
3	0.3	0.4	0	0.7
f(x)	0.3	0.5	0.2	1

$$\begin{cases} \operatorname{cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = 1.7 - 0.9\times 2.4 = -0.46 \\ E(xy) = \sum xyf(x,y) = 0\times 1\times 0 + 0\times 3\times(0.3) \\ +1\times 1\times 0.1 + 1\times 3\times 0.4 + 2\times 1\times 0.2 + 2\times 3\times 0 = 1.7 \\ E(x) = \sum xf(x) = 0\times 0.3 + 1\times 0.5 + 2\times 0.2 = 0.9 \\ E(y) = \sum yf(y) = 1\times 0.3 + 3\times 0.7 = 2.4 \end{cases}$$

۱۲ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به توزیع چند جمله‌ای داریم:

$$\frac{7!}{2!2!3!}(0.5)^2(0.3)^2(0.2)^3 = 210\times 0.25\times 0.09\times 0.008 = 0.0378$$

۱۳ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که تابع فوق، تابع چگالی توزیع نمایی با $\lambda = \frac{1}{2}$ است داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \\ E(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{cases}$$

راه دوم: محاسبه مستقیم امید است. از طریق انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء:

$$E(x) = \int_0^{\infty} x\,f(x)dx = \int_0^{\infty} x.\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = \left[x\left(-e^{-\frac{x}{2}}\right) - 1.\left(2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right]_0^{\infty} = 2$$

نکته : هرگاه تابع چگالی به ازای x های مثبت تعریف شده باشد یعنی $x > 0$ می‌توان امید ریاضی را به طریق زیر محاسبه کرد:

$$E(x) = \int_0^{\infty}\left[1 - F(x)\right]dx$$

مثلاً در این سؤال داریم:

$$\begin{cases} E(x) = \int_0^{\infty}\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left(-2e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big]_0^{\infty} = 2 \\ F(x) = \int_0^{x}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left(-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\Big]_0^{x} = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به اینکه ذکر نشده جامعه نرمال است اما چون در توزیع‌های نمونه‌ای $\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2$ موردی که جامعه‌ها نرمال نباشد نداریم. جامعه‌ها را نرمال فرض می‌کنیم، واریانس جوامع هم معلوم است و $n_1, n_2 \geq 1$ پس طبق مورد اول از توزیع‌های نمونه‌ای $\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2$ داریم:

$$\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2\,,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\sigma^2\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{9}{100} + \frac{4}{25} = 0.25 \rightarrow \sigma\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) = 0.5$$ انحراف معیار تفاضل میانگین دو نمونه

توجه: به دلیل مستقل بودن دو نمونه جزء $-2\operatorname{cov}\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right)$ برابر صفر می‌شود بنابراین از نوشتن آن در محاسبه $\sigma^2\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right)$ صرف‌نظر کردیم.

اشتباه طراح سوال: باید می‌گفت انحراف معیار تفاضل میانگین دو **نمونه** کدام است؟ نه دو جامعه

۱۵ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

x^2	x	y	y^2	xy
4	2	3	9	6
9	3	5	25	15
16	4	1	1	4
25	5	4	16	20
36	6	2	4	12
$\sum x^2 = 90$	$\sum x = 20$	$\sum y = 15$	$\sum y^2 = 55$	$\sum xy = 57$

$$r_{xy} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \frac{\sum x}{n} \times \frac{\sum y}{n}}{\sqrt{\left(\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2\right)\left(\frac{\sum y^2}{n} - \left(\frac{\sum y}{n}\right)^2\right)}}$$

$$= \frac{\frac{57}{5} - \frac{20}{5} \times \frac{15}{5}}{\sqrt{\left(\frac{90}{5} - \left(\frac{20}{5}\right)^2\right)\left(\frac{55}{5} - \left(\frac{15}{5}\right)^2\right)}} = \frac{\frac{-3}{5}}{\sqrt{\frac{10}{5} \times \frac{10}{5}}} = \frac{\frac{-3}{5}}{\frac{10}{5}} = -0.3$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

برنامه‌ریزی شهری ۸۵

۱ ـ در جدول داده‌های طبقه‌بندی شده زیر مقدار میانگین به صورت $22 + 4a$ محاسبه شده است. a کدام است؟

مرکز دسته	14	18	22	26	30
فراوانی	5	12	18	9	6

۱) -0.04 ۲) -0.02 ۳) 0.02 ۴) 0.04

۲ ـ در 80 داده آماری مجموع تمام داده‌ها برابر 192 و مجموع مجذورات آن‌ها 720 می‌باشد. ضریب پراکندگی (C.V) کدام است؟

۱) 0.25 ۲) 0.50 ۳) 0.60 ۴) 0.75

۳ ـ در جدول داده‌های زیر انحراف چارکی کدام است؟

حدود دسته	10 – 13	13 – 16	16 – 19	19 – 22	22 – 25
فراوانی	5	9	12	10	4

۱) 2.2 ۲) 2.4 ۳) 2.6 ۴) 2.8

۴ ـ میانگین یک جامعه 15.5 و مد (Mo) آن 14 می‌باشد، چولگی و میانه آن کدام است؟

۱) چوله به چپ، 14.5 ۲) چوله به راست، 14.5 ۳) چوله به چپ، 15 ۴) چوله به راست، 15

۵ ـ در یک توزیع آماری ضریب کشیدگی $E = -0.20$ محاسبه شده است، این توزیع با مقایسه توزیع نرمال چگونه است؟

۱) پراکندگی بیشتر ـ تفاوت اندک ۲) پراکندگی کمتر ـ تفاوت اندک
۳) پراکندگی بیشتر ـ تقریباً نرمال ۴) پراکندگی کمتر ـ تقریباً نرمال

۶ ـ تصحیح شپارد در مورد واریانس N داده از متغیر پیوسته در مواردی به کار می‌رود که ..... < N و تابع توزیع فراوانی ..... باشد.

۱) 100 ـ اندکی متقارن ۲) 100 ـ غیرمتقارن ۳) 1000 ـ اندکی متقارن ۴) 1000 ـ غیرمتقارن

۷ ـ از محصولات دو کارخانه متمایز به ترتیب 20 درصد و 30 درصد کالای تولید شده تاریخ تولید ندارند، اگر از هر محصول این دو، یک کالا انتخاب کنیم با کدام احتمال لااقل یکی از کالاها تاریخ تولید دارد؟

۱) 0.86 ۲) 0.92 ۳) 0.94 ۴) 0.96

۸ ـ تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی x , y در جدول مقابل است:

x \ y	2	4	6
0	0.2	0.08	0.12
1	0.3	0.12	0.18

cov (x , y) برابر کدام است؟

۱) -0.5 ۲) -0.4 ۳) 0 ۴) 0.5

۹ ـ در یک آزمایش برنولی احتمال موفقیت $\frac{3}{4}$ است، اگر این آزمایش 192 بار تکرار شود، انحراف معیار تعداد موفقیت‌ها کدام است؟

۱) 4 ۲) 6 ۳) 9 ۴) 12

۱۰ ـ در کدام توزیع میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی برابر یکدیگرند؟

۱) پواسن ۲) پاسکال ۳) برنولی ۴) فوق هندسی

۱۱ ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 72 و واریانس 16 مقدار $p(67 \le x \le 77)$ کدام است؟ $\left(S_{-\infty}^{-1.25} = 0.1056\right)$

۱) 0.7688 ۲) 0.7868 ۳) 0.7886 ۴) 0.7888

۱۲ ـ متغیر x دارای یک توزیع پواسن با میانگین 16 می‌باشد. $p(x < 12)$ با تصحیح پیوستگی و استفاده از توزیع نرمال کدام است؟ $\left(S_0^{1.125} = 0.1302\right)$

۱) 0.1302 ۲) 0.3698 ۳) 0.6302 ۴) 0.8698

۱۳ ـ انحراف معیار یک جامعه 10 و میزان خطای برآورد آن 2.05 می‌باشد. حداقل تعداد نمونه لازم برای فاصله اطمینان 0.90 میانگین کدام است؟ $p(z < -1.64) = 0.05$

۱) 64 ۲) 81 ۳) 50 ۴) 56

۱۴ ـ اگر $\bar{p}$ آماره p در نمونه‌های n تایی از جامعه N عضوی باشد، $\sigma_{\bar{p}}^2$ کدام است؟

۱) $\frac{p(1-p)}{n}$ ۲) $\frac{p(1-p)}{N}$ ۳) $np(1-p)$ ۴) $\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{N}$

۱۵ ـ در جدول مقابل ضریب همبستگی بین دو متغیر y,x کدام است؟

x	0	4	3	1
y	4	1	−1	0

۱) $-\frac{\sqrt{35}}{10}$ ۲) $\frac{-\sqrt{14}}{5}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{14}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{10}$

۱۶ ـ درجه آزادی یک توزیع کای ـ دو برابر 5 می‌باشد، واریانس این توزیع کدام است؟

۱) 10 ۲) 5 ۳) $\sqrt{10}$ ۴) 2.5

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی برنامه‌ریزی شهری ۸۵

۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\mu_x = 22 + 4a \rightarrow 4a = \mu_x - 22 \rightarrow a = \mu\left(\frac{x-22}{4}\right)$$

ابتدا مرکز دسته‌ها را از 22 کم می‌کنیم و بعد به 4 تقسیم می‌کنیم. سپس از داده‌های جدید میانگین می‌گیریم تا مقدار a به دست آید. توجه کنیم که از خواص میانگین برای ساده شدن حل استفاده شده است.

x_i	14	18	22	26	30	
$\frac{1}{4}(x_i - 22)$	−2	−1	0	1	2	
F_i	5	12	18	9	6	N = 50

$$a = \mu\left(\frac{x-22}{4}\right) = \frac{\sum F_i\left(\frac{x_i - 22}{4}\right)}{N} = \frac{(-2)\times 5 + (-1)\times 12 + 0\times 18 + 1\times 9 + 2\times 6}{50} = \frac{-1}{50} = -0.02$$

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$$\sum x = 192 \quad , \quad \sum x^2 = 720 \quad , \quad N = 80$$

$$\begin{cases} C.V = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1.8}{2.4} = \frac{3}{4} = 0.75 \\ \sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2 = \frac{720}{80} - (2.4)^2 = 3.24 \rightarrow \sigma = 1.8 \\ \mu = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{192}{80} = 2.4 \end{cases}$$

۳ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

		Q_1		Q_3	
CL	10 − 13	13 − 16	16 − 19	19 − 22	22 − 25
F_i	5	9	12	10	4
F_{c_i}	5	14	26	36	40 = N

محل چارک اول: اولین دسته‌ای که $F_{c_i} \geq \frac{N}{4} = \frac{40}{4} = 10 \leftarrow$ دسته دوم $(13 - 16)$

$$Q_1 = 13 + \frac{10-5}{9} \times 3 = 14.66$$

محل چارک سوم: اولین دسته‌ای که $F_{c_i} \geq \frac{3N}{4} = \frac{3\times 40}{4} = 30 \leftarrow$ دسته چهارم $(19 - 22)$

$$Q_3 = 19 + \frac{30-26}{10} \times 3 = 20.2$$

(انحراف چارکی) $SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{20.2 - 14.66}{2} = \frac{5.54}{2} = 2.77 \simeq 2.8$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

$\mu = 15.5 \ , \ Mo = 14 \ \rightarrow \ Mo < Md < \mu \ \rightarrow$ چوله به راست

همان‌طور که می‌دانیم میانه همیشه عددی بین میانگین و مد است $Mo = 14 < \underbrace{Md}_{14.5,15} < \mu = 15.5$

با این روش هر دو گزینه ۲ و ۴ صحیح می‌باشد زیرا 14.5 , 15 هر دو عددی بین مد و میانگین هستند. تنها راه به دست آوردن میانه از روی مد و میانگین رابطه سه معیار تمرکز در چولگی خفیف است.

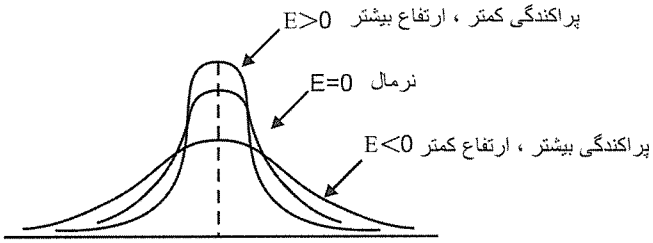
$$3(\mu - Md) = \mu - Mo \ \rightarrow \ 3(15.5 - Md) = 15.5 - 14 \rightarrow Md = 15$$

۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به ۲ نکته زیر:

۱ـ هر چه ارتفاع منحنی کمتر باشد، پراکندگی‌اش بیشتر است و هر چه ارتفاع منحنی بیشتر باشد، پراکندگی‌اش کمتر است. در این سؤال چون ضریب کشیدگی منفی است پس ارتفاع منحنی از توزیع نرمال کمتر است و پراکندگی‌اش بیشتر

۲ـ $0.1 < |E| \le 0.5$ کشیدگی غیرقابل اغماض و تفاوت اندک با نرمال دارد.



۶ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تصحیح شپارد برای واریانس متغیر پیوسته هنگامی که $N > 1000$ و تابع توزیع فراوانی حدوداً متقارن باشد بکار می‌رود و به صورت روبه رو است:

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 - \frac{I^2}{12} \ (I = \text{فاصله طبقات})$$

۷ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

P (لااقل یکی از کالاها تاریخ تولید دارند) $= 1 - P$ (هیچ‌کدام تاریخ تولید نداشته باشد) $= 1 - (0.2)(0.3) = 0.94$

۸ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد برای محاسبه کواریانس بهتر است ابتدا مستقل بودن دو متغیر را با کامل کردن جدول و چک کردن رابطه $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$ به ازای تمامی x,yها، به صورت ذهنی امتحان کنیم. زیرا در صورت مستقل بودن، $cov(x,y)$ صفر است و دیگر نیازی به محاسبه نیست.

x \ y	2	4	6	f(x)
0	0.2	0.08	0.12	0.4
1	0.3	0.12	0.18	0.6
f(y)	0.5	0.2	0.3	1

$$\begin{cases} f(0\,,2) = 0.2 = f_x(0)f_y(2) = 0.4 \times 0.5 \\ f(0\,,4) = 0.08 = f_x(0)f_y(4) = 0.4 \times 0.2 \\ f(0\,,6) = 0.12 = f_x(0)f_y(6) = 0.4 \times 0.3 \\ f(1\,,2) = 0.3 = f_x(1)f_y(2) = 0.6 \times 0.5 \\ f(1,4) = 0.12 = f_x(1)f_y(4) = 0.6 \times 0.2 \\ f(1\,,6) = 0.18 = f_x(1)f_y(6) = 0.6 \times 0.3 \end{cases}$$

در این سوال نیز x , y مستقلند در نتیجه: $cov(x,y) = 0$

راه دوم: محاسبه کواریانس از طریق فرمول

$$\begin{cases} E(xy) = 2.16 \,, E(x) = 0.6 \,, E(y) = 3.6 \\ cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = 2.16 - 0.6 \times 3.6 = 0 \end{cases}$$

۹ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

هرگاه یک آزمایش برنولی n بار تکرار شود. توزیع x (تعداد موفقیت در n بار) دوجمله‌ای است.

$$n = 192 \,, p = \frac{3}{4} \,, q = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x^2 = npq = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36 \rightarrow \sigma_x = 6$$ انحراف معیار

۱۰ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

همان‌طور که می‌دانیم در توزیع پواسن با پارامتر λ:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \underset{\lambda > 0}{x = 0, 1, \ldots} \qquad \mu = \sigma^2 = \lambda$$

۱۱ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

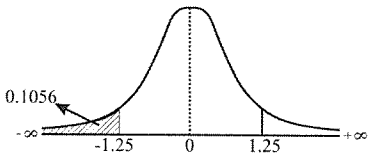
با توجه به نوع سوم سؤالات نرمال:

$$X \sim N(72 \,, 16) \rightarrow \mu = 72 \,, \sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4$$

$$(1)\ p(67 \le x \le 77) = p\left(\frac{67-72}{4} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{77-72}{4}\right) = (-1.25 \le z \le 1.25) = 0.7888$$

$$(2) S_{-\infty}^{-1.25} = p(z < -1.25) = p(z > 1.25) = 0.1056$$

$$\rightarrow p(-1.25 < z < 1.25) = 1 - 2 \times 0.1056 = 0.7888$$



۱۲ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

از تقریب پواسن به نرمال استفاده می‌کنیم با توجه به این‌که $\lambda = 16 > 10$ است و در صورت سؤال هم ذکر شده استفاده از توزیع نرمال

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 16 \rightarrow \mu = 16 \,, \sigma = 4$$

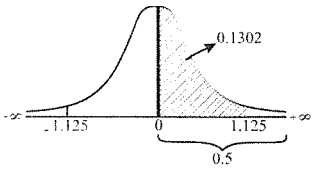
نکته: هرگاه تصحیح پیوستگی (که برای تبدیل توزیع گسسته به پیوسته استفاده می‌شود.) در صورت سؤال خواسته شد به طریق روبرو عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} p(a < x < b) \longrightarrow p(a - 0.5 < x < a + 0.5) \\ p(x < a) \longrightarrow p(x < a + 0.5) \\ p(x > a) \longrightarrow p(x > a - 0.5) \end{cases}$$

چون مقدار $p(x < 12) = p(x < 12.5) = p(z < -0.875)$ داده شده از مکمل آن استفاده می‌کنیم یعنی $p(x > 12)$ را حساب کرده سپس از یک کم می‌کنیم $p(x < 12) = 1 - p(x > 12)$

$$(1)\ p(x > 12) = p(x > 11.5) = p\left(\frac{z-\lambda}{\sqrt{\lambda}} > \frac{11.5-16}{4}\right) = p(z > -1.125) = 0.6302$$

$$(2)\ S_0^{1.125} = p(0 < z < 1.125) = 0.1302$$



$$\rightarrow p(z > 1.125) = p(z < -1.125) = 0.5 - 0.1302 = 0.3698$$

$$\rightarrow p(z > -1.125) = 1 - p(z < -1.125) = 1 - 0.3698 = 0.6302$$

$$p(x < 12) = 1 - p(x > 12) = 1 - 0.6302 = 0.3698$$

۱۳ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} e = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 2.05 = 1.64 \dfrac{10}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{16.4}{2.05} \rightarrow \sqrt{n} = 8 \rightarrow n = 64 \\ \sigma = 10\ , e = 2.05,\ \alpha = 0.1 \rightarrow z_{0.05} = 1.64 \end{cases}$$

۱۴ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \text{X : تعداد صفت موردنظر در جامعه دوجمله‌ای است.} \qquad \bar{p} = \dfrac{x}{n} \ \text{(نرخ در نمونه)} \\ E(\bar{p}) = E\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{E(x)}{n} = \dfrac{np}{n} = p \\ \sigma^2_{\bar{p}} = \sigma^2\left(\dfrac{x}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \sigma^2_x = \dfrac{1}{n^2} npq = \dfrac{pq}{n} = \dfrac{p(1-p)}{n} \end{cases}$$

توجه: اگر روش نمونه‌گیری، بدون جایگذاری باشد ضریب تصحیح $\dfrac{N-n}{N-1}$ در واریانس $\bar{p}$ ضرب می‌شود.

۱۵ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

x^2	x	y	y^2	xy
0	0	4	16	0
16	4	1	1	4
9	3	−1	1	−3
1	1	0	0	0
$\sum x^2 = 26$	$\sum x = 8$	$\sum y = 4$	$\sum y^2 = 18$	$\sum xy = 1$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

$$r = \frac{\dfrac{\sum xy}{n} - \dfrac{\sum x}{n} \times \dfrac{\sum y}{n}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2\right)\left(\dfrac{\sum y^2}{n} - \left(\dfrac{\sum y}{n}\right)^2\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{8}{4} \times \dfrac{4}{4}}{\sqrt{\left(\dfrac{26}{4} - \left(\dfrac{8}{4}\right)^2\right)\left(\dfrac{18}{4} - \left(\dfrac{4}{4}\right)^2\right)}} = \frac{\dfrac{-7}{4}}{\sqrt{\dfrac{10}{4} \times \dfrac{14}{4}}} = \frac{-\dfrac{7}{2}}{\sqrt{35}} \xrightarrow[\text{در } \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{35}} \text{ ضرب}]{\text{کسر را گویا می‌کنیم}} = \frac{-\sqrt{35}}{10}$$

۱۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$x \sim \chi^2_{(n)} \rightarrow \begin{cases} E(x) = n \\ \sigma^2_x = 2n \rightarrow \sigma^2\left(\chi^2_{(5)}\right) = 2 \times 5 = 10 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

برنامه‌ریزی شهری ۸۶

۱ ـ فراوانی مطلق چیست؟

۱) تکرار هر داده ۲) دسته‌بندی داده‌ها ۳) نسبت فراوانی به تعداد نمونه ۴) ضریبی از فراوانی تجمعی

۲ ـ جامعه آماری چیست؟

۱) سرشماری جمعیت ۲) تعداد کل اعضای جامعه

۳) نمونه‌گیری تصادفی که در سرشماری بکار می‌رود. ۴) مجموعه‌ای از افراد یا اشیا که موضوع مورد مطالعه هستند.

۳ ـ متغیرها را از این نظر که قابل اندازه‌گیری باشند یا نه، به کدام گروه‌ها تقسیم می‌کنند؟

۱) پیوسته ـ کمی ۲) پیوسته ـ گسسته ۳) کمی ـ کیفی ۴) گسسته ـ کیفی

۴ ـ کدام‌یک از متغیرهای زیر کیفی است؟

۱) متوسط درجه سالانه شهر ۲) تعداد مسافرین حمل و نقل عمومی شهر

۳) میزان آلودگی هوای شهر ۴) مراقبت از فضای سبز شهر

۵ ـ متغیرهای تصادفی کمی به کدام دو دسته تقسیم می‌شوند؟

۱) اسمی ـ ترتیبی ۲) ترتیبی ـ اسمی ۳) گسسته ـ پیوسته ۴) گسسته ـ اسمی

۶ ـ مزیت اطلاعات کمی بر کیفی چیست؟

۱) اندازه‌گیری دقیق از موضوع و قابلیت تعمیم نتایج ۲) توصیف دقیق از اطلاعات و قابلیت تفسیر آن

۳) قابلیت تفسیر اطلاعات و نتیجه‌گیری تجریدی ۴) قابلیت دستیابی به برداشت‌های مختلف

۷ ـ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط 24 باشد، فراوانی مطلق دسته چهارم کدام است؟

مرکز دسته	13	15	17	19	21
فراوانی تجمعی	5	14	a	41	50

۱) 14 ۲) 15 ۳) 16 ۴) 17

۸ ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 47 و واریانس 64، اگر به هر مقدار متغیر 5 واحد افزوده شود آن‌گاه چند درصد داده‌های جدید بیشتر از 52 خواهد شد؟

۱) 48 ۲) 50 ۳) 52 ۴) 55

۹ ـ در یک جامعه آماری چارک اول، دوم، سوم به ترتیب 52، 70 و 84 شده است، مقدار انحراف چارکی کدام است؟

۱) 32 ۲) 18 ۳) 16 ۴) 14

۱۰ ـ در 100 داده آماری با میانگین 7 مجموع مربعات تمام داده‌ها $\sum_{i=1}^{100}(x_i - 7)^3 = 192,6500$ ضریب چولگی جامعه چند درصد است؟

۱) 4.6 ۲) 3 ۳) 2.3 ۴) 2

۱۱ ـ به چند طریق می‌توان 9 مجسمه متمایز را در 4 بوستان قرارداد به طوری که در بوستان بزرگ‌تر سه مجسمه و در هر یک از بوستان‌های دیگر 2 مجسمه قرار داده شود؟

۱) 7650 ۲) 7560 ۳) 6750 ۴) 6570

۱۲ ـ در یک توزیع نرمال با میانگین 17.2 و واریانس 16 ، داده نظیر پنجاه و شش امین صدک آن کدام است؟ $(p(z < -0.15) = 0.44)$

۱) 18.4 ۲) 16.6 ۳) 18.2 ۴) 17.8

۱۳ ـ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 1 < x < 4 \\ 0 & \end{cases}$ تابع چگالی متغیر تصادفی x باشد، واریانس این متغیر تصادفی کدام است؟

۱) 0.25 ۲) 0.75 ۳) 1.25 ۴) 1.5

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

حل تشریحی برنامه‌ریزی شهری ۸۶

۱ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

فراوانی مطلق هر داده یک عدد طبیعی است که میزان تکرار هر داده را در نمونه یا جامعه نشان می‌دهد در عین حال گزینه ۳ فراوانی نسبی است.

۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۳ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

صفات متغیر از نظر قابلیت اندازه‌گیری به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می‌شوند.

صفات متغیر کمی: امکان اندازه‌گیری و بیان یک عدد واحد دار وجود دارد و به دو دسته پیوسته (قد و وزن ...) و گسسته (تعداد اعضای خانواده و ...) تقسیم می‌شوند.

صفات متغیر کیفی: امکان اندازه‌گیری با ابزارهای رایج وجود نداشته و نمی‌توان آن را به صورت عددی واحددار بیان نمود. مانند: گروه خونی، رنگ پوست و ...

۴ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به پاسخ سوال قبل

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

۵ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به پاسخ دو سوال قبل

۶ـ گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۷ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته۱: فراوانی تجمعی دسته آخر با تعداد داده‌ها (N) برابر است $\leftarrow$ $F_{c_5} = N = 50$

نکته۲:

$$\begin{cases} f_i = \dfrac{F_i}{N} & \text{(فراوانی نسبی)} \\ f_i \times 100 = \dfrac{F_i}{N} \times 100 & \text{(درصد فراوانی نسبی)} \end{cases}$$

(فراوانی مطلق دسته سوم) $\boxed{F_3 = 12}$ $\leftarrow \dfrac{F_3}{50} \times 100 = 24 \leftarrow f_3 \times 100 = 24$ (درصد فراوانی نسبی دسته وسط)

حال با داشتن F_3 می‌توان مقدار a (فراوانی تجمعی دسته سوم $= F_{c_3}$) را به دست آورد.

نکته۳: $\left(F_{c_i} = F_i + F_{c_{i-1}}\right)$ فراوانی تجمعی هر دسته برابر است با فراوانی مطلق آن دسته بعلاوه فراوانی تجمعی دسته قبل

$a = F_{c_3} = F_3 + F_{c_2} = 12 + 14 = 26$

حال با کامل شدن ردیف فراوانی تجمعی جدول به راحتی ردیف فراوانی مطلق به دست می‌آید زیرا:

دسته	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
F_{c_i}	5	14	$\boxed{a = 26}$	41	$50 = N$
F_i	5	9	12	15	9
$f_i \times 100$			24		

$F_i = F_{c_i} - F_{c_{i-1}}$

$F_4 = F_{c_4} - F_{c_3} = 41 - 26 = 15$

۸ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به نوع سوم سؤالات نرمال: $X \sim N(47,64) \rightarrow \mu_x = 47 , \sigma_x^2 = 64 \rightarrow \sigma_x = 8$

$Y = X + 5$ (به هر مقدار متغیر 5 واحد افزوده شود) $\rightarrow \begin{cases} \mu_y = \mu(x+5) = \mu_x + 5 = 47 + 5 = 52 \\ \sigma_y = \sigma(x + \overset{0}{\cancel{5}}) = \sigma_x = 8 \end{cases}$

$p(y > 52) = p\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} > \frac{52 - 52}{8}\right) = p(z > 0) = 0.50 = 50$ درصد

راه دوم: $p(x + 5 > 52) = p(x > 47) = p\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} > \frac{47 - 47}{8}\right) = p(x > 0) = 0.5 = 50$ درصد

۹ـ گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$Q_1 = 52 \quad , \quad Q_2 = 70 \quad , \quad Q_3 = 84$

(انحراف چارکی) $SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{84 - 52}{2} = \frac{32}{2} = 16$

۱۰ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$N = 100 \ , \mu = 7 \ , \sum x^2 = 6500$

$$\begin{cases} sk = \dfrac{\frac{\sum (x_i - \mu)^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\frac{\sum (x_i - 7)^3}{N}}{\sigma^3} = \dfrac{\frac{192}{100}}{4^3} = 0.03 = \%3 \\ \sigma^2 = \dfrac{\sum x^2}{N} - \left(\dfrac{\sum x}{N}\right)^2 = \dfrac{6500}{100} - (7)^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4 \end{cases}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

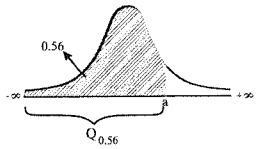
۱۱ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560$$

۱۲ـ گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به نوع چهارم سؤالات نرمال: $X \sim N(17.2 ,16) \rightarrow \mu = 17.2 \ , \sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4$

$p(x \le a) = 0.56 \rightarrow$

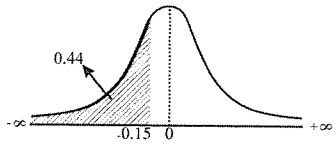


پنجاه و شش‌امین صدک: $Q_{0.56}$

$$(1)\, p(x \le a) = 0.56 \rightarrow p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{a-17.2}{4}\right) = 0.56$$

$$(2)\, p(z < -0.15) = 0.44 \rightarrow p(z > -0.15) = 0.56$$

$$(1),(2)\ \frac{a-17.2}{4} = -(-0.15) \rightarrow a = 17.8$$



با توجه به نکته $p(z < A) = p(z > B) \rightarrow A = -B$

۱۳ـ گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

با توجه به این‌که تابع چگالی پیوسته یک عدد است توزیع x یکنواخت پیوسته است با: $a = 1\ ,\ b = 4$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \qquad 1 < x < 4$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

راه دوم: محاسبه واریانس از طریق مستقیم است.

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \int_1^4 x^2 . \frac{1}{3} dx - \left(\int_1^4 x . \frac{1}{3} dx\right)^2 = \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^4 - \left(\frac{1}{6}\left[x^2\right]^4\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{9}(64-1)\right) - \left(\frac{1}{6}(16-1)\right)^2 = \frac{3}{4}$$

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی و مدل‌های پیش‌بینی

مقدمه

« سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که برحسب زمان (یا هر کمیت دیگر) مرتب شده باشد » و معمولاً آن را به صورت $x_1, x_2, ..., x_n$ نشان می‌دهند. تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی به مشاهداتی مربوط می‌شود که مستقل نبوده و به طور متوالی به هم وابسته‌اند. کاربرد اصلی تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی « پیش‌بینی » است.

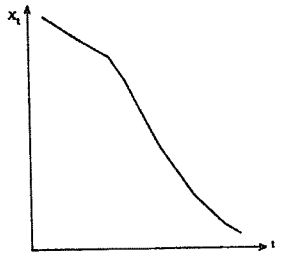
○ اجزای تشکیل دهندهٔ سری زمانی

اجزای تشکیل دهنده سری زمانی عبارتند از:

۱- روند
۲- تغییرات دوره‌ای
۳- تغییرات فصلی
۴- تغییرات نامنظم

● روند

روند عبارت است از تغییرات دراز مدت در میانگین سری زمانی؛ به عبارت دیگر سیر طبیعی سری زمانی را در دراز مدت روند گویند که در این صورت افت و خیزهای سری زمانی را نادیده گرفته و به نمای کلی آن توجه می‌کنند؛ برای مثال رشته کوه‌ها از نزدیک پستی و بلندی‌های زیادی دارند، ولی روی نقشه با یک منحنی ساده نشان داده می‌شوند.

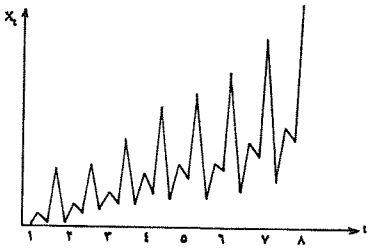


منحنی روند نزولی در سری زمانی

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

● تغییرات فصلی

تغییرات فصلی تغییراتی هستند که در دوره‌های تناوبی کوتاه پیش می‌آیند. این تغییرات مربوط به عواملی هستند که به طریقی منظم و چرخه‌ای روی یک دورهٔ کمتر از یک سال عمل می‌کنند. اگر مشاهدات سری زمانی به صورت هر سه ماه، ماهانه، هفتگی و یا روزانه ثبت شوند، تغییرات فصلی در سری زمانی وجود دارد.



منحنی تغییرات فصلی

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

● تغییرات دوره‌ای

حرکات نوسانی در یک سری زمانی با دوره نوسان بیشتر از یک سال را تغییرات دوره‌ای می‌نامند. این تغییرات در سری‌های زمانی به واسطهٔ افت و خیزهایی است که بعد از یک دورهٔ بیشتر از یک سال رجعت می‌کنند. نوسانات دوره‌ای ممکن است به طور دقیق از طرح‌های مشابهی بعد از فواصل زمانی مساوی پیروی کنند، ولی همیشه این طور نیست.

چنانکه در این شکل مشخص است، اگر خط روند، موازی با محور t تصور شود، می‌توان نوسانات دوره‌ای را بالا و پایین خط روند مشخص کرد. چنین نوساناتی را « تغییرات دوره‌ای » می‌نامند.

تغییرات دوره‌ای

● تغییرات نامنظم

در هر سری زمانی عامل دیگری وجود دارد که آن را تغییرات نامنظم یا تصادفی می‌نامند. این تغییرات کاملاً تصادفی بوده و نتیجهٔ نیرویی پیش‌بینی نشدنی است که به طریقی نامنظم عمل می‌کند. این‌گونه تغییرات، طرح معینی را نشان نمی‌دهند و دورهٔ زمان وقوع آن‌ها منظم نیست. برای مثال این تغییرات به وسیلهٔ عواملی مانند سیل، زلزله، اعتصاب‌ها و غیره به وجود می‌آیند که رفتار آن‌ها نامنظم و پیش‌بینی نشدنی است و به طور معمول کوتاه مدت هستند، ولی گاهی اوقات اثر آن‌ها به اندازه‌ای زیاد است که باعث پیدایش تغییرات دوره‌ای و تغییرات دیگر می‌شود.

تغییرات نامنظم سری زمانی

○ انواع مدل‌های سری زمانی

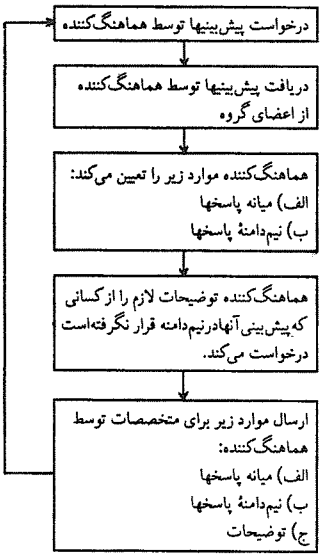
وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

انواع مدل‌های سری زمانی:
- ۱- مدل جمعی
- ۲- مدل ضربی

نکته :

برای پیش‌بینی رفتار سری‌های زمان و تعیین مدل پیش‌بینی، فنون مختلفی وجود دارد، این فنون را می‌توان بـه دو دسـته؛ روش‌هـای کمی و روش‌های کیفی تقسیم کرد.

○ مدل‌های کمی پیش‌بینی



فرایند روش دلفی برای پیش‌بینی کیفی

هماهنگ کننده شکل می‌گیرد. و هیچ عضوی از گروه از سایر اعضای خبر ندارد بلکه همهٔ ارتباطات از طریق هماهنگ کنندهٔ اصلی انجام می‌گیرد.

هماهنگ کننده، پس از دریافت پاسخ‌ها از اعضای گروه، نیم‌دامنه و میانهٔ پاسخ‌ها را محاسبه می‌کند. نیم‌دامنه عبارت است از تفاوت چارک سوم و اول که شامل 50 درصد پاسخ‌ها خواهد شد. از متخصصانی که پاسخ آن‌ها خارج از نیم‌دامنه قرار می‌گیرد، خواسته می‌شود که توضیحات خود را راجع به علت پیش‌بینی ذکر کنند.

● روش طوفان مغزی

یکی از روش‌های بسیار مهم و متداول در پیش‌بینی‌های کیفی، « روش طوفان مغزی » است. با استفاده از این روش می‌خواهیم تحرکی بزرگ در فکر و ذهن اعضای گروه به وجود آوریم و سیلی خروشان از عقاید و نظرهای بدیع به راه‌اندازیم تا پیش‌بینی نهایی به واقعیت نزدیکتر باشد.

طوفان مغزی به عنوان یک روش براساس این فرضیه بنا شده است که جلسه‌ای تشکیل شود تا در آن هرکس بتواند آزادانه و بدون ترس از انتقاد، هر فکری که به نظرش می‌رسد، ابراز کند. در جلسات طوفان مغزی یافتن نظرهای جدید اولویت دارد و مطالعهٔ امکان‌پذیری آن‌ها، به بعد موکول می‌شود.

● روش گروه اسمی

در روش « طوفان مغزی »، نظم و قاعدهٔ خاصی برای پیش‌بینی وجود ندارد و در واقع، با آزاد گذاشتن کامل افراد و با تأکید و تشویق بر خودجوشی می‌خواهیم به نظر و عقاید تازه‌ای برسیم و از این راه، تصمیم‌گیری گروهی را بهتر و غنی‌تر کنیم. در حالی که گروه اسمی، روشی است که می‌خواهد ضمن تشویق و ترغیب افراد به نوآوری و خلاقیت و فراهم آوردن شرایط مناسب برای آن، به فرایند پیش‌بینی، نظم بیشتری دهد.

● مدل‌های تلفیقی

اغلب تحلیلگران برای انتخاب بهترین مدل پیش‌بینی، تلاش می‌کنند که مدل‌های متعدد را به طور مجزا بررسی و آزمون کنند. مدلی که پیش‌بینی‌های آن انحراف کمتری با واقعیت داشته باشد به عنوان بهترین مدل انتخاب می‌شود. رویکرد انتخاب یک مدل خاص از بین مدل‌های مختلف پیش‌بینی بر این تفکر بنا شده است که بالاخره بهترین مدل برای تبیین رفتار یک سری زمانی وجود دارد و هیچ مدلی غیر از مدل انتخاب شده دارای صحت در پیش‌بینی نیست.

تحقیقات اخیر نشان داده است که ترکیب دو یا چند مدل خاص پیش‌بینی می‌تواند به صحت بهتری از مقادیر پیش‌بینی بیانجامد. « رویکرد تلفیقی » بر این فرض بنا شده است که برخی مدل‌های حذف شده، صرف نظر از مدل انتخاب شده اطلاعات مفیدی دارند که با قرارگرفتن در کنار مدل انتخابی و ترکیب آن‌ها با همدیگر، واریانس خطای پیش‌بینی بسیار کوچک خواهد شد.

اگر چه مدل‌های پیشرفته‌ای چون ARIMA و اقتصاد سنجی، پیش‌بینی‌های خوبی د رمحیط‌های پویا و دوره‌های زمانی میان مدت و کوتاه مدت دارند ولی تحقیقات زیادی نشان می‌دهد که تلفیق مدل‌های پیش‌بینی به شدت خطای پیش‌بینی را کاهش می‌دهد.

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

خلاصه

تحلیل سری‌های زمانی نشان داد که هر سری زمانی دست کم یکی از تغییرات – روند، فصلی، دوره‌ای و نامنظم – را دارد. این تغییرات تشکیل دهندهٔ سری زمانی هستند و به اجزای سری زمانی معروفند. براساس نوع تغییرات سری زمانی و تحلیل آن می‌توان به دو گروه مدل پیش‌بینی پی برد:

گروه اول مدل‌های کمی هستند که مهمترین آن‌ها عبارتند از:

۱- ساده (بدون تغییر و با درصد تغییر)،

۲- میانگین متحرک (ساده و موزون)،

۳- نمو هموار ساده،

۴- هلت – وینترز (فصلی و غیرفصلی)،

۵- اتورگرسیو – میانگین متحرک تلفیقی (ARIMA)،

۶- اقتصاد سنجی.

گروه دوم به روش‌های کیفی معروفند که در محیط‌های آشفته و پویا از آن‌ها استفاده می‌شود و اساس پیش‌بینی در آن‌ها اجماع خبرگان و متخصصان امر است. مهمترین مدل‌های این گروه عبارتند از: ۱- روش دلفی، ۲- روش طوفان مغزی، ۳- روش گروه اسمی

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

وب سایت تخصصی مدیریت صنعتی
www.pnu-m-s.com
نمونه سوالات رایگان مدیریت
کتب و مقالات مدیریت

○ سوالات چهارگزینه‌ای

۱ ـ از مدل نمو همواره ساده برای پیش‌بینی در چه نوع سری‌های زمانی استفاده می‌شود؟

۱) سری‌های زمانی که تغییرات فصلی دارند.
۲) سری‌های زمانی که تغییرات منظم دارند.
۳) سری‌های زمانی که تغییرات دوره‌ای دارند.
۴) سری‌های زمانی که تغییرات فصلی و نامنظم دارند.

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۲ ـ کدام یک از روش‌های زیر، جزء روش‌های کمی است؟

۱) گروه اسمی ۲) دلفی ۳) طوفان مغزی ۴) میانگین متحرک وزنی

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۳ ـ کدام‌یک از روش‌های زیر، جزء روش‌های کیفی است؟

۱) هلت – وینترز ۲) دلفی ۳) باکس و جنکینز ۴) نمو هموار ساده

حل : گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۴ ـ کدام‌یک از مدل‌های زیر، جزء مدل‌های ARIMA نیستند؟

۱) دلفی ۲) رگرسیون ساده ۳) میانگین متحرک ساده ۴) میانگین متحرک وزنی

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۵ ـ کدام یک از مدل‌های زیر از صحت بالاتری برخوردارند؟

۱) تلفیق باکس و جنکینز با هلت – وینترز
۲) تلفیق هلت – وینترز با نمو هموار ساده
۳) تلفیق باکس و جنکینز با میانگین متحرک
۴) به معیارهای صحت بستگی دارد.

حل : گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

۶ ـ کدام یک از مدل‌های زیر متغیر مستقل دارند؟

۱) اقتصاد سنجی ۲) میانگین متحرک وزنی ۳) هلت – وینترز ۴) نمو هموار ساده

حل : گزینه ۱ صحیح می‌باشد.